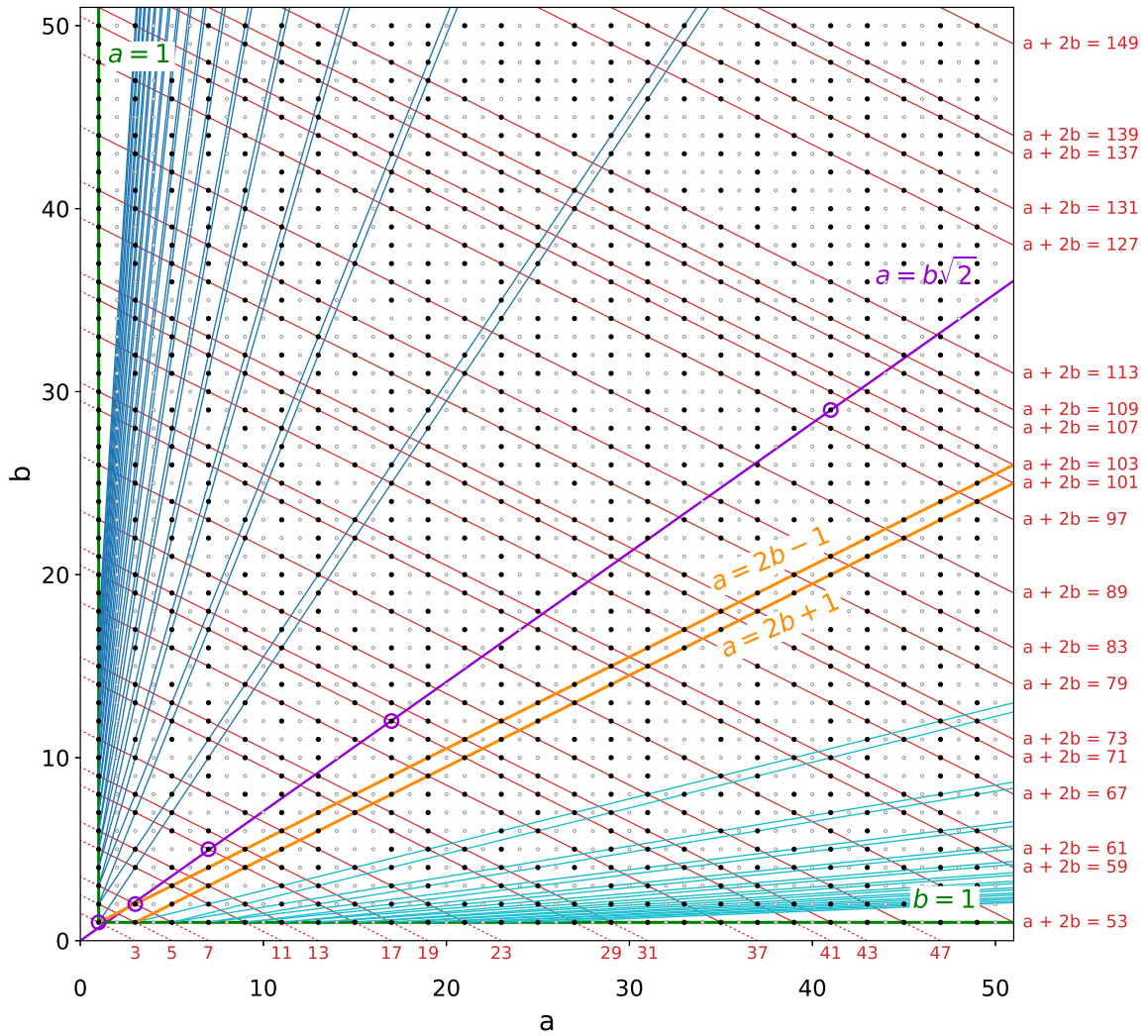


COMMENT SEMER DES GRAINES DE CATHÈTES POUR RÉCOLTER DES TRIANGLES RECTANGLES BIEN ALIGNÉS



CLAUDE ABRACADABRAM

Avant-propos

On vit une époque formidable ! Celle où un amateur de mathématiques peut (re)découvrir dans son coin des notions et en apprendre de nouvelles grâce à Claude (Opus 5) et pas mal de curiosité et de patience.

Cet article est le fruit de notre collaboration. J'espère qu'il ne contient plus d'erreurs ni de moments d'emphase propres aux IA d'aujourd'hui, qui pensent encore qu'aller dans le sens qu'elles croient être le nôtre est la meilleure chose à faire, quitte à raconter n'importe quoi et à nous faire croire, par exemple, que notre méthode surpasse celle d'Euclide... Sacré(e) Claude !

Sans aller si loin, cet article a tout de même le mérite de mettre en évidence des relations entre des concepts qu'un non spécialiste sera heureux de découvrir ou de (re)découvrir, et peut-être même que la façon dont il le fait est originale, allez savoir !

Bonne lecture.

Table des matières

Avant-propos	1
Résumé	4
Introduction	5
Chapitre 1. Les graines (a, b)	6
1.1. La formule	6
1.2. Les graines sont les défauts d'hypoténuse	6
1.3. Le plan des graines	8
1.4. Aire, périmètre, cercle inscrit : des monômes des graines	8
1.5. Une démonstration du théorème de Pythagore par les demi-angles	9
1.6. Une démonstration du théorème de Pythagore par le plan des phases	11
Chapitre 2. Les trois familles extrêmes	14
2.1. La famille $a = 1 : z = y + 1$	14
2.2. La famille $b = 1 : z = x + 2$	15
2.3. Les deux familles dans le tableau à double entrée	16
2.4. La troisième famille : les réduites de $\sqrt{2}$	16
2.5. Le mot des écarts	20
2.6. Ce que le mot code	20
Chapitre 3. Une famille par racine carrée	22
3.1. Le principe	22
3.2. Le choix des graines	22
3.3. Retrouver l'algorithme sans les fractions continues	23
3.4. Le mot des sauts	24
3.5. Exemples des racines de 3, 5 et 7	25
3.6. Ce que l'on observe	28
3.7. Remarques	28
3.8. Engendrer les irrationnels	29
Chapitre 4. Des triplets primitifs bien alignés	30
4.1. Le choix des droites	31
4.2. Les segments rouges et les nombres premiers	31
4.3. Du verger d'Euclide au plan des graines	32
4.4. Le réseau des triplets primitifs voisins	36
Chapitre 5. Une particule est un triangle	37
5.1. De la relation d'Einstein au théorème de Pythagore	37
5.2. La vitesse se lit sur le triangle	38

5.3. Les graines et leurs deux défauts	38
5.4. L'énergie cinétique, c'est $2b^2$	39
5.5. La vitesse en graines : le facteur de Doppler	40
5.6. À b fixé : la même énergie cinétique	40
5.7. Les triangles effilés, et le retour de $\frac{1}{2}mv^2$	41
5.8. À a fixé : vers la lumière	42
5.9. Toutes les familles vont quelque part	43
5.10. La troisième famille : les triangles presque isocèles	43
Chapitre 6. Les droites $a + 2b = d$ sont des fusées à photons	45
6.1. La droite $a + 2b = d$	45
6.2. D'un point au suivant : un photon émis vers l'arrière	45
6.3. La fusée à photons	46
6.4. L'accélération	46
6.5. Les nombres premiers	49
6.6. Les niveaux interdits	49
6.7. Le facteur de Doppler relie les fusées	50
6.8. Récapitulatif	55
Conclusion	56
Abaque	57
Table des triplets pour $a, b \in \{1, \dots, 10\}$	57
Bibliographie	60

Résumé

À écrire.

Introduction

À écrire.

Chapitre 1

Les graines (a, b)

1.1. La formule

Un *triplet pythagoricien* est un triplet de réels strictement positifs (x, y, z) tel que $x^2 + y^2 = z^2$; l'usage réserve souvent ce nom aux entiers, on l'étend ici aux réels. Un triplet entier est *primitif* (ou *irréductible*) si $\gcd(x, y, z) = 1$.

DÉFINITION 1.1. Soient $a, b > 0$. On prolonge (a, b) par la récurrence de Fibonacci : $c = a + b$, $d = b + c$. On pose

$$(1) \quad x = ad, \quad y = 2bc, \quad z = b^2 + c^2.$$

En développant, $x = a(a + 2b)$, $y = 2b(a + b)$ et $z = a^2 + 2ab + 2b^2$.

PROPOSITION 1.2. *Le triplet (1) est pythagoricien.*

DÉMONSTRATION. Notons t_1, t_2, t_3, t_4 les quatre termes a, b, c, d . La récurrence donne $t_3 - t_2 = t_1$ et $t_3 + t_2 = t_4$, donc

$$x = t_1 t_4 = t_3^2 - t_2^2, \quad y = 2t_2 t_3, \quad z = t_2^2 + t_3^2,$$

et $(t_3^2 - t_2^2)^2 + (2t_2 t_3)^2 = (t_2^2 + t_3^2)^2$. $\square$

La formule (1) est donc celle d'Euclide, de paramètres $m = t_3$ et $n = t_2$: les deux termes du milieu de la suite. La substitution $a = m - n$, $b = n$ est linéaire et inversible sur $\mathbb{Z}$. Ce qui suit porte sur les graines t_1, t_2 , et non sur les termes du milieu.

1.2. Les graines sont les défauts d'hypoténuse

PROPOSITION 1.3. *Pour (x, y, z) donné par (1),*

$$(2) \quad z - y = a^2, \quad z - x = 2b^2, \quad x - y = a^2 - 2b^2.$$

DÉMONSTRATION. $z - y = (a^2 + 2ab + 2b^2) - 2b(a + b) = a^2$ et $z - x = (a^2 + 2ab + 2b^2) - a(a + 2b) = 2b^2$; la troisième identité est leur différence. $\square$

Chaque graine mesure donc de combien l'hypoténuse dépasse une cathète. La formule s'inverse :

$$(3) \quad a = \sqrt{z - y}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{2}(z - x)}.$$

Ces deux défauts ont aussi une lecture physique, développée au chapitre 5.

THÉORÈME 1.4. *L'application $(a, b) \mapsto (x, y, z)$ définie par (1) est une bijection de $\mathbb{R}_{>0}^2$ sur l'ensemble des triplets pythagoriciens réels strictement positifs.*

DÉMONSTRATION. L'injectivité résulte de (3). Soit (x, y, z) un triplet. Comme $z > x$ et $z > y$, la formule (3) définit $a, b > 0$, et il reste à voir qu'ils redonnent le triplet. Avec $a^2 = z - y$ et $2b^2 = z - x$, l'égalité $z = a^2 + 2ab + 2b^2$ s'écrit $x + y - z = 2ab = \sqrt{2(z - y)(z - x)}$, dont le carré vaut

$$(x + y - z)^2 = 2z^2 + 2xy - 2xz - 2yz = 2(z - y)(z - x)$$

en utilisant $x^2 + y^2 = z^2$; la racine est licite car $x + y > z$. Alors $ad = a^2 + 2ab = (z - y) + (x + y - z) = x$, et de même $2bc = y$. $\square$

L'inversion donne aussi le couple associé au triplet dont on a échangé les cathètes.

PROPOSITION 1.5. *Si (a, b) engendre (x, y, z) , alors $\varphi(a, b) = (\sqrt{2}b, a/\sqrt{2})$ engendre (y, x, z) , et φ est une involution de $\mathbb{R}_{>0}^2$.*

DÉMONSTRATION. Par (3) appliquée à (y, x, z) , le couple cherché est $(\sqrt{z - x}, \sqrt{(z - y)/2}) = (\sqrt{2}b, a/\sqrt{2})$ d'après (2). Et $\varphi \circ \varphi = \text{id}$. $\square$

L'image d'un couple entier fait intervenir $\sqrt{2}$: un triplet entier n'a donc qu'un seul couple de paramètres entiers.

De même, x, y, z étant homogènes de degré 2 en (a, b) , le couple $(\sqrt{k}a, \sqrt{k}b)$ engendre l'agrandissement (kx, ky, kz) : on obtient tous les multiples d'un triplet en multipliant ses graines par $\sqrt{k}$.

PROPOSITION 1.6. *Pour a, b entiers positifs, le triplet (1) est primitif si et seulement si $\gcd(a, b) = 1$ et a est impair.*

DÉMONSTRATION. $\gcd(m, n) = \gcd(a + b, b) = \gcd(a, b)$, et la condition $m \not\equiv n \pmod{2}$ s'écrit a impair. $\square$

C'est le critère de primitivité de la formule d'Euclide, lu dans les graines. Seul a est contraint en parité, b restant libre : c'est $z - y = a^2$ qui porte l'obstruction, $z - x = 2b^2$ étant pair.

REMARQUE 1.7 (Le domaine des paramètres). La formule (1) garde un sens sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, et $z = b^2 + c^2$ y reste strictement positif. Mais x, y, z sont homogènes de degré 2, de sorte que $(-a, -b)$ redonne le triplet de (a, b) ; et les couples de signes contraires produisent une cathète négative. La restriction à $a, b > 0$ n'est du reste pas une convention : en retranchant (1),

$$x + y - z = 2ab,$$

et $x + y > z$ dans tout triangle, d'où $ab > 0$: a et b sont de même signe. Au changement de signe $(a, b) \mapsto (-a, -b)$ près, qui ne change pas le triplet, le domaine $\mathbb{R}_{>0}^2$ est donc le seul sur lequel (1) est bijective.

Ce domaine est un produit : chaque paramètre parcourt $\mathbb{R}_{>0}$ indépendamment de l'autre. Les conditions d'Euclide $m > n > 0$ délimitent au contraire un secteur, où les deux paramètres sont liés par une inégalité; la substitution $(m, n) \mapsto (m - n, n)$ redresse ce secteur en quadrant. C'est le pendant géométrique du critère de primitivité, où la contrainte croisée $m \not\equiv n \pmod{2}$ devient une contrainte sur a seul. Dans les deux cas, une condition couplant les paramètres se sépare — et c'est ce qui rend les familles de la section suivante lisibles : on peut y fixer une graine sans se soucier de l'autre.

1.3. Le plan des graines

La figure 1 place chaque triplet en son couple de graines. La table des triplets pour $a, b \leq 10$ est donnée dans l'abaque, en fin de volume.

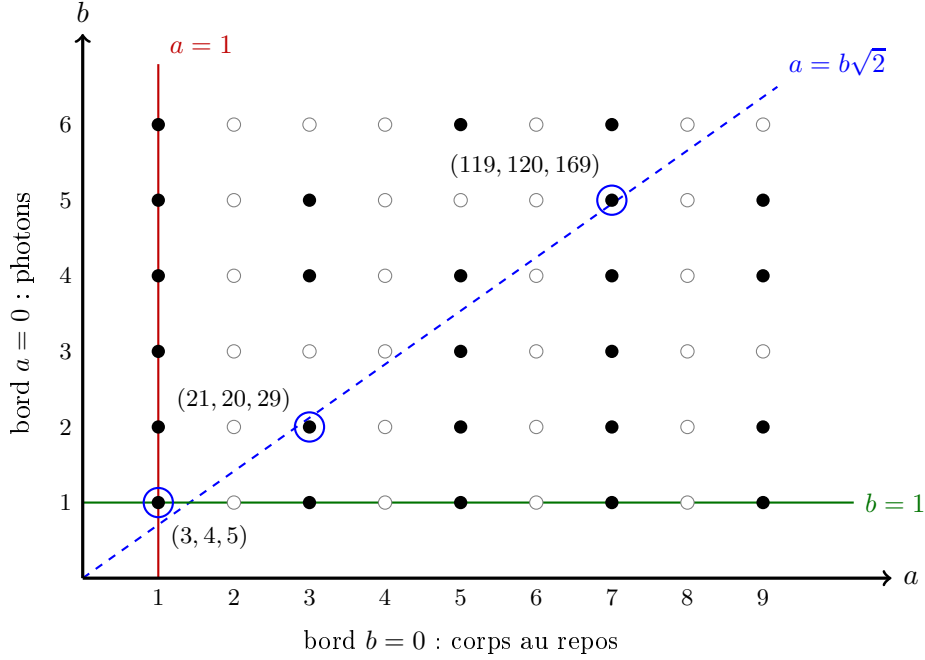


FIGURE 1. Des triangles rectangles bien alignés : le tableau précédent dans le plan des graines (a, b) . Chaque point est un triplet, en noir les primitifs. Les familles $a = 1$ ($z = y + 1$) et $b = 1$ ($z = x + 2$) sont exactement sur leur droite, et l'on écrit leur terme général. La famille presque isocèle (en bleu) ne peut que longer la droite $a = b\sqrt{2}$, qui ne porte aucun point entier : ses triplets sont les points entiers qui s'en approchent le mieux. Les deux bords sont les cas limites du chapitre 5 : $a = 0$ donne le photon, $b = 0$ le corps au repos. La figure 1 en donne une représentation plus complète, qui trace d'autres droites de triplets primitifs et fait apparaître les nombres premiers (chapitre 4).

1.4. Aire, périmètre, cercle inscrit : des monômes des graines

Les défauts ne sont pas les seules quantités du triangle qui se factorisent dans les graines : les sommes de côtés le font aussi, et avec elles l'aire, le périmètre et le cercle inscrit.

PROPOSITION 1.8 (Aire, périmètre, cercle inscrit). *Pour (x, y, z) donné par (1), avec $c = a + b$ et $d = a + 2b$,*

$$(4) \quad x + y + z = 2cd, \quad y + z - x = 2bd, \quad x + z - y = 2ac, \quad x + y - z = 2ab.$$

Le demi-périmètre vaut donc $s = cd$, le rayon du cercle inscrit $r = ab$, et l'aire $\mathcal{A} = abcd$.

DÉMONSTRATION. Avec $x = c^2 - b^2$, $y = 2bc$ et $z = b^2 + c^2$: $x + y + z = 2c^2 + 2bc = 2c(b+c) = 2cd$; $y + z - x = 2b^2 + 2bc = 2b(b+c) = 2bd$; $x + z - y = 2c^2 - 2bc = 2c(c-b) = 2ac$; $x + y - z = 2bc - 2b^2 = 2b(c-b) = 2ab$. Dans un triangle rectangle, $\mathcal{A} = xy/2 = ad \cdot bc$ et $r = (x + y - z)/2$. $\square$

La formule de Héron, $16\mathcal{A}^2 = (x + y + z)(y + z - x)(x + z - y)(x + y - z)$, donne ici $16a^2b^2c^2d^2$, soit $\mathcal{A} = abcd = xy/2$: les trois longueurs seules suffisent à retrouver que l'angle entre x et y est droit. Chez Euclide les quatre facteurs sont $2m(m+n)$, $2n(m+n)$, $2m(m-n)$ et $2n(m-n)$; les graines nomment $m-n$, n , m et $m+n$, et chaque quantité du triangle devient un monôme en a , b , c , d .

Longueurs de tangente et demi-angles. Le cercle inscrit touche chaque côté en un point qui le partage en deux *longueurs de tangente* ; les deux tangentes issues d'un même sommet étant égales, ces longueurs valent $s - x$ au sommet opposé à x , $s - y$ au sommet opposé à y , $s - z$ au sommet de l'angle droit. Par (4),

$$(5) \quad s - x = bd, \quad s - y = ac, \quad s - z = ab = r.$$

Le centre du cercle inscrit est sur les trois bissectrices, et le triangle formé par un sommet, le centre et un point de contact est rectangle au point de contact, de cathètes r et la longueur de tangente du sommet. Notant α , β , γ les angles opposés à x , y , z :

$$(6) \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-x} = \frac{a}{d}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-y} = \frac{b}{c}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-z} = 1.$$

La dernière redonne $\gamma = 90^\circ$. Les deux premières sont les rapports des deux extrêmes et des deux moyens de la suite a, b, c, d ; pour un triplet primitif, ce sont les tangentes des demi-angles écrites sous forme irréductible : $1/3$ et $1/2$ pour $(3, 4, 5)$, $1/5$ et $2/3$ pour $(5, 12, 13)$. Elles vérifient l'identité (7) de la Section 1.5.

Cercles exinscrits. Le cercle exinscrit dans un angle est tangent au côté opposé et aux prolongements des deux autres ; son rayon vaut l'aire divisée par la longueur de tangente du sommet. Par (5),

$$r_\alpha = \frac{abcd}{bd} = ac, \quad r_\beta = \frac{abcd}{ac} = bd, \quad r_\gamma = \frac{abcd}{ab} = cd = s.$$

Récapitulatif.

côtés	$x = ad, \quad y = 2bc, \quad z = b^2 + c^2$
défauts d'hypoténuse	$z - y = a^2, \quad z - x = 2b^2, \quad x - y = a^2 - 2b^2$
demi-périmètre, rayon inscrit, aire	$cd, \quad ab, \quad abcd$
longueurs de tangente	$bd, \quad ac, \quad ab$
tangentes des demi-angles	$a/d, \quad b/c, \quad 1$
rayons exinscrits	$ac, \quad bd, \quad cd$

1.5. Une démonstration du théorème de Pythagore par les demi-angles

Les tangentes des demi-angles a/d et b/c de la section précédente y ont été calculées dans un triangle supposé rectangle. On les prend ici comme point de départ, et l'on montre qu'elles conduisent au théorème de Pythagore. Cette section utilise la Proposition 1.2, les formules d'addition et de duplication de la tangente, et un peu de géométrie élémentaire pour le lemme 1.10 (triangle isocèle, angle extérieur, somme des angles d'un triangle).

Soient $a, b > 0$, $c = a + b$, $d = a + 2b$, et

$$t_1 = \frac{a}{d}, \quad t_2 = \frac{b}{c}, \quad x = ad, \quad y = 2bc, \quad z = b^2 + c^2.$$

Les deux tangentes sont liées par une identité purement algébrique :

$$(7) \quad \left(1 + \frac{a}{d}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) = 2.$$

En effet $d + a = 2(a + b) = 2c$ et $c + b = a + 2b = d$, de sorte que le produit vaut $2cd/cd$. Développée, elle s'écrit $t_1 + t_2 = 1 - t_1 t_2$, c'est-à-dire $\tan(u + v) = 1$ dès que $t_1 = \tan u$ et $t_2 = \tan v$: deux nombres de $]0, 1[$ qui vérifient (7) sont les tangentes des demi-angles aigus d'un même triangle rectangle. L'identité dit donc que a/d et b/c sont les tangentes de deux demi-angles complémentaires ; elle sert à identifier les deux angles aigus du triangle (lemme 1.9). Le calcul de l'hypoténuse, lui, n'utilise que $t_1 = a/d$ (théorème 1.11).

LEMME 1.9. *Soient u et v les angles de $]0, 45^\circ[$ tels que $\tan u = t_1$ et $\tan v = t_2$, et soient $\alpha = 2u$, $\beta = 2v$. Alors*

$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \tan \alpha = \frac{x}{y}, \quad \tan \beta = \frac{y}{x}.$$

DÉMONSTRATION. Les nombres t_1, t_2 sont dans $]0, 1[$, ce qui définit u et v , et l'identité (7) s'écrit $t_1 + t_2 = 1 - t_1 t_2$. Par la formule d'addition,

$$\tan(u + v) = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2} = 1,$$

et $u + v$, dans $]0, 90^\circ[$, vaut 45° ; donc $\alpha + \beta = 2(u + v) = 90^\circ$. Par la formule de duplication,

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{2t_1}{1 - t_1^2} = \frac{2ad}{d^2 - a^2} = \frac{2ad}{(d - a)(d + a)} = \frac{2ad}{2b \cdot 2c} = \frac{ad}{2bc} = \frac{x}{y}, \\ \tan \beta &= \frac{2t_2}{1 - t_2^2} = \frac{2bc}{c^2 - b^2} = \frac{2bc}{(c - b)(c + b)} = \frac{2bc}{a \cdot d} = \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad \square$$

LEMME 1.10. *Dans un triangle rectangle de cathètes x, y et d'hypoténuse h , l'angle α opposé à x vérifie*

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{x}{y + h}.$$

DÉMONSTRATION. Soit ABC le triangle, rectangle en C , avec $CB = x$, $CA = y$, $AB = h$, $\alpha = \widehat{CAB}$. Soit D le point de la demi-droite $[CA)$, au-delà de A , tel que $AD = h$ (figure 2). Le triangle ABD est isocèle en A , donc $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$; l'angle α est extérieur à ce triangle en A , donc $\alpha = \widehat{ADB} + \widehat{ABD}$, et $\widehat{ADB} = \alpha/2$. Le triangle DCB est rectangle en C , de cathètes $CB = x$ et $CD = y + h$, d'où $\tan(\alpha/2) = CB/CD = x/(y + h)$. $\square$

THÉORÈME 1.11 (Pythagore). *Le triangle rectangle de cathètes $x = ad$ et $y = 2bc$ a pour angles aigus α et β , pour hypoténuse $z = b^2 + c^2$, et $x^2 + y^2 = z^2$.*

DÉMONSTRATION. L'angle opposé à x a pour tangente x/y , donc c'est α par le lemme 1.9, et l'autre angle aigu est β . Soit h l'hypoténuse. Par le lemme 1.10 et $\tan(\alpha/2) = a/d$,

$$y + h = \frac{x}{t_1} = ad \cdot \frac{d}{a} = d^2, \quad h = d^2 - 2bc = (a + 2b)^2 - 2b(a + b) = a^2 + 2ab + 2b^2 = z.$$

L'égalité $x^2 + y^2 = z^2$ est la Proposition 1.2. $\square$

PROPOSITION 1.12. *Tout triangle rectangle est de cette forme.*

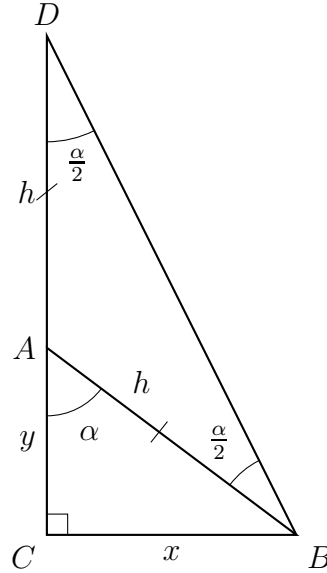


FIGURE 2. Le lemme 1.10 : $AD = AB = h$, et $\tan(\alpha/2) = x/(y + h)$ dans le triangle DCB .

DÉMONSTRATION. Soit un triangle rectangle dont on choisit une cathète, notée x' ; soit y' l'autre et α' l'angle opposé à x' . Comme $\alpha'/2 < 45^\circ$, $t = \tan(\alpha'/2) \in]0, 1[$. On définit $a, b > 0$ par

$$\frac{a}{b} = \frac{2t}{1-t} \quad \text{et} \quad a(a+2b) = x'.$$

La première condition équivaut à $t = a/(a+2b) = t_1$, donc $\alpha' = \alpha$ et $y' = x'/\tan \alpha = y$; la seconde donne $x' = x$. Le théorème s'applique. $\square$

Le couple (a, b) est unique une fois choisie la cathète x ; l'autre choix donne le couple $\varphi(a, b)$ de la Proposition 1.5.

EXEMPLE 1.13. $a = b = 1 : c = 2, d = 3, t_1 = 1/3, t_2 = 1/2, \tan \alpha = 3/4, h = d^2 - 2bc = 9 - 4 = 5. a = 1, b = 2 : c = 3, d = 5, t_1 = 1/5, t_2 = 2/3, \tan \alpha = 5/12, h = 25 - 12 = 13.$

Les formules d'addition et de duplication de la tangente se démontrent par des triangles semblables, sans le théorème de Pythagore ; la preuve n'est donc pas circulaire. Le lemme 1.10 est la formule $\tan(\theta/2) = \sin \theta / (1 + \cos \theta)$ avec sa figure habituelle, et le paramétrage $t_1 = a/d$ est celui du cercle par la tangente du demi-angle : $\sin \alpha = 2t_1/(1 + t_1^2) = x/z$ et $\cos \alpha = (1 - t_1^2)/(1 + t_1^2) = y/z$.

Le lemme 1.10 et la formule de duplication suffisent d'ailleurs pour n'importe quel triangle rectangle de cathètes x, y et d'hypoténuse h : avec $T = \tan(\alpha/2) = x/(y + h)$ et $\tan \alpha = x/y = 2T/(1 - T^2)$, on obtient $2y(y + h) = (y + h)^2 - x^2$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = h^2$. Les graines rendent ce calcul explicite, en donnant d'avance $\tan(\alpha/2) = a/d, y + h = d^2$ et $h = b^2 + c^2$.

1.6. Une démonstration du théorème de Pythagore par le plan des phases

Un triangle rectangle de cathètes c et b se lit comme le nombre complexe $w = c + ib$. La multiplication par w envoie le carré unité sur un carré, parce que l'image de $(0, 1)$ est celle de $(1, 0)$ tournée d'un quart de tour ; ce carré a pour côté l'hypoténuse r , donc pour aire r^2 .

La même application a pour déterminant $c^2 + b^2$. D'où $r^2 = b^2 + c^2$. La preuve ne calcule aucune longueur : elle n'utilise que le quart de tour et l'aire d'un parallélogramme. C'est le découpage de Bhāskara écrit en une ligne, et la figure du *Ménon* en est le cas $c = b$.

1.6.1. Le cadre. Soit un triangle rectangle de cathètes c et b , deux réels strictement positifs. Plaçons le sommet de l'angle droit à l'origine et les deux cathètes sur les axes : le troisième sommet est le point (c, b) , et l'hypoténuse est le segment qui le joint à l'origine. Notons r sa longueur.

Ce r est un nom, pas un calcul : on ne suppose rien de lui, et le théorème à démontrer est exactement

$$r^2 = b^2 + c^2.$$

Lisons le point (c, b) comme le nombre complexe $w = c + ib$, et notons M la multiplication par w , c'est-à-dire l'application linéaire

$$M : (u, v) \longmapsto (cu - bv, bu + cv).$$

1.6.2. L'image du carré unité.

LEMME 1.14. *M envoie le carré unité sur un carré de côté r .*

DÉMONSTRATION. Les images des deux vecteurs de base se lisent sur la formule :

$$M(1, 0) = (c, b), \quad M(0, 1) = (-b, c).$$

Or la rotation d'un quart de tour autour de l'origine envoie (u, v) sur $(-v, u)$, donc envoie (c, b) sur $(-b, c)$. Le second vecteur est donc le premier tourné d'un quart de tour : ils ont la même longueur r , et ils sont perpendiculaires. L'application M étant linéaire, l'image du carré unité est le parallélogramme construit sur ces deux vecteurs, c'est-à-dire un carré de côté r . $\square$

La perpendicularité vient ici de la rotation, non d'un produit scalaire nul : aucune formule ne relie encore des longueurs à des coordonnées.

1.6.3. L'aire.

LEMME 1.15. *M multiplie les aires par $c^2 + b^2$.*

DÉMONSTRATION. Le facteur est la valeur absolue du déterminant de M , soit

$$\det M = c \cdot c - (-b) \cdot b = c^2 + b^2.$$

Et l'aire du parallélogramme construit sur (p, q) et (s, t) vaut $|pt - qs|$: on l'obtient en enfermant ce parallélogramme dans un rectangle de côtés $p + s$ et $q + t$, puis en retranchant deux rectangles et quatre triangles rectangles, dont les aires sont des produits et des demi-produits de côtés parallèles aux axes. Aucune longueur oblique n'y figure. $\square$

1.6.4. Le théorème.

THÉORÈME 1.16 (Pythagore). *Dans un triangle rectangle de cathètes b et c et d'hypoténuse r ,*

$$r^2 = b^2 + c^2.$$

DÉMONSTRATION. Le carré unité a pour aire 1 ; par le lemme 1.15, son image par M a donc pour aire $c^2 + b^2$. Par le lemme 1.14, cette image est un carré de côté r , donc d'aire r^2 . $\square$

Les deux nombres b et c étant deux réels strictement positifs quelconques, l'énoncé vaut pour tout triangle rectangle.

1.6.5. Ce que la preuve utilise. Trois choses, et pas une de plus :

- la rotation d'un quart de tour conserve les longueurs et tourne d'un angle droit ;
- un carré de côté r a pour aire r^2 ;
- une application linéaire multiplie les aires par son déterminant, lequel s'obtient par un découpage en rectangles et en triangles rectangles.

Elle ne calcule jamais r . N'y figurent ni produit scalaire, ni loi des cosinus, ni $\sin^2 + \cos^2 = 1$, ni triangles semblables, ni puissance d'un point.

Un piège mérite d'être nommé, parce qu'il est à un caractère près. Il est tentant d'écrire $r^2 = |w|^2 = w\bar{w} = c^2 + b^2$ et de croire la démonstration faite en une ligne. Mais l'égalité $|w|^2 = w\bar{w}$ est le théorème : elle suppose que la longueur du vecteur (c, b) se calcule par $\sqrt{c^2 + b^2}$, ce qui est précisément ce qu'on veut établir. La preuve ci-dessus s'en garde : r y reste la longueur d'un segment, et $c^2 + b^2$ n'apparaît jamais comme un module, seulement comme un déterminant, c'est-à-dire comme une aire.

1.6.6. Le cas isocèle, et le découpage. Pour $c = b$, l'application M est la multiplication par $b(1 + i)$ et son déterminant vaut $2b^2$: le carré de la diagonale d'un carré de côté b vaut deux fois son aire. C'est le résultat du *Ménon* [9], dont la figure est le cas particulier du découpage général : quatre carrés de côté b disposés en 2×2 forment un carré d'aire $4b^2$, et le quadrilatère qui joint les milieux de ses côtés contient quatre demi-petits-carrés, donc a pour aire $2b^2$.

Le découpage général est celui de Bhāskara [10] : le carré de côté r se partage en quatre copies du triangle et un carré de côté $|c - b|$, d'où

$$r^2 = 4 \cdot \frac{bc}{2} + (c - b)^2 = b^2 + c^2.$$

On le trouve aussi dans la tradition chinoise, sous la figure du *hsuan-thu*. Le déterminant en est l'écriture algébrique : les quatre triangles et le petit carré sont ce que le calcul $c \cdot c - (-b) \cdot b$ compte d'un coup.

La démonstration donnée ici n'apporte donc pas un fait nouveau. Ce qui lui est propre est le cadre : le triangle rectangle y est un nombre, le découpage y devient un déterminant, et la figure disparaît au profit d'une multiplication.

1.6.7. Retour aux graines. Le plan où vit w est celui des graines. Si (c, b) vient d'un couple (a, b) par $c = a + b$, et si l'on pose $d = a + 2b$,

$$x = ad, \quad y = 2bc, \quad z = b^2 + c^2,$$

alors $w^2 = x + iy$: le triangle rectangle engendré par les graines est le carré du vecteur des phases.

Le théorème 1.16 appliqué au triangle des phases donne $r^2 = z$. Et M étant une similitude de rapport r — l'image du quadrillage est un quadrillage r fois plus grand —, le vecteur w^2 , image de w , a pour longueur $r \cdot r = r^2 = z$. Le triangle de cathètes x et y a donc pour hypoténuse z .

La formule d'Euclide, lue comme une élévation au carré, livre ainsi le triplet et son hypoténuse d'un seul mouvement : $z = b^2 + c^2$ n'est plus une définition qu'il faut ensuite vérifier, c'est la longueur que la similitude impose.

Les trois familles extrêmes

D'après (2), fixer une graine revient à fixer un défaut d'hypoténuse :

$$(8) \quad a = k \iff z - y = k^2, \quad b = k \iff z - x = 2k^2.$$

Chaque valeur de k définit donc une famille infinie de triplets à défaut constant, portée par une droite parallèle à un axe du plan des graines. Les deux droites $k = 1$ donnent les deux familles les plus simples, celles des plus petits défauts.

Un triangle a trois paires de côtés, donc trois défauts, et (2) les donne tous les trois. Aucun ne peut s'annuler, et pour deux raisons distinctes : $z = y$ ou $z = x$ annulerait une cathète, tandis que $x = y$ imposerait $a = b\sqrt{2}$, qu'aucun couple d'entiers ne réalise. Chaque défaut admet donc un minimum strictement positif. Pour des graines entières, $z - y = a^2$ vaut au moins 1, exactement quand $a = 1$; $z - x = 2b^2$ est pair et vaut au moins 2, exactement quand $b = 1$ (la valeur 1 est donc impossible) ; enfin $|x - y| = |a^2 - 2b^2|$ vaut au moins 1, exactement quand $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.

Les trois familles ainsi obtenues sont les plus isocèles possibles, chacune pour sa paire de côtés : aucun triangle rectangle irréductible n'a l'hypoténuse plus proche de sa cathète paire que dans la première, ni plus proche de sa cathète impaire que dans la deuxième, ni ses deux cathètes plus proches l'une de l'autre que dans la troisième. Multiplier un triplet par k multipliant les trois défauts par k , ces minima sont atteints sur des triplets primitifs.

L'asymétrie entre 1 et 2 n'est pas un défaut de la deuxième : elle est déjà dans (2), où $z - x = 2b^2$ porte un facteur 2 que $z - y = a^2$ n'a pas, et cela pour a et b réels quelconques. La parité de la cathète $y = 2bc$ en est la trace sur les entiers, et l'on verra à la Section 2.4 que ce même facteur 2 est ce qui fait apparaître $\sqrt{2}$. Sur un triplet primitif, où a est impair, cela se dit encore ainsi : *z moins la cathète paire est un carré impair, z moins la cathète impaire est deux fois un carré.*

Les autres valeurs ne sont pas hors d'atteinte pour autant : elles demandent des graines irrationnelles, et tout entier est alors réalisé.

COROLLAIRE 2.1. *Le triplet (3, 4, 5) appartient aux trois familles, et c'est le seul triplet à en réunir deux.*

DÉMONSTRATION. Ses graines sont (1, 1), qui vérifient les trois conditions. Réciproquement, $a = 1$ et $b = 1$ donnent directement (1, 1) ; $a = 1$ et $a^2 - 2b^2 = \pm 1$ donnent $1 - 2b^2 = \pm 1$, donc $b = 1$; $b = 1$ et $a^2 - 2b^2 = \pm 1$ donnent $a^2 = 3$ ou $a^2 = 1$, donc $a = 1$. Les trois intersections deux à deux se réduisent au couple (1, 1). $\square$

2.1. La famille $a = 1 : z = y + 1$

Pour $a = 1$, la formule (1) donne

$$x = 2b + 1, \quad y = 2b(b + 1), \quad z = 2b^2 + 2b + 1,$$

et $z - y = 1$ pour tout b . **Tous ces triplets sont primitifs**, puisque $\gcd(1, b) = 1$ et que 1 est impair.

C'est la famille que Proclus attribue à Pythagore [3] : à partir d'un nombre impair $2n + 1$, le triplet

$$(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1),$$

avec ici $n = b$.

b	x	y	z	$z - y$	$z - x$
1	3	4	5	1	2
2	5	12	13	1	8
3	7	24	25	1	18
4	9	40	41	1	32
5	11	60	61	1	50
6	13	84	85	1	72
7	15	112	113	1	98
8	17	144	145	1	128
9	19	180	181	1	162
10	21	220	221	1	200

La colonne $z - y$ est constante par construction ; la colonne $z - x$ parcourt les $2b^2$, conformément à (2). La cathète impaire $x = 2b + 1$ prend, elle, toutes les valeurs impaires à partir de 3 : chaque nombre impair ≥ 3 est donc cathète d'exactly un triplet de cette famille.

2.2. La famille $b = 1 : z = x + 2$

Pour $b = 1$,

$$x = a(a + 2), \quad y = 2(a + 1), \quad z = (a + 1)^2 + 1,$$

et $z - x = 2$ pour tout a . **Le triplet est primitif si et seulement si a est impair.**

C'est la famille que Proclus attribue à Platon [3] : à partir d'un nombre pair $2n$, le triplet

$$(n^2 - 1, 2n, n^2 + 1),$$

avec ici $n = a + 1$.

a	x	y	z	$z - x$	$z - y$
1	3	4	5	2	1
2	8	6	10	2	4
3	15	8	17	2	9
4	24	10	26	2	16
5	35	12	37	2	25
6	48	14	50	2	36
7	63	16	65	2	49
8	80	18	82	2	64
9	99	20	101	2	81
10	120	22	122	2	100

Symétriquement, $z - x$ est constante et $z - y$ parcourt les carrés a^2 . La cathète paire $y = 2(a + 1)$ prend toutes les valeurs paires à partir de 4. Les lignes primitives sont celles de rang impair.

2.3. Les deux familles dans le tableau à double entrée

En rangeant les triplets selon les deux graines, les deux familles sont exactement la première colonne et la première ligne (en gras) :

$b \backslash a$	$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$	$a = 6$	$a = 7$
$b = 1$	(3, 4, 5)	(8, 6, 10)	(15, 8, 17)	(24, 10, 26)	(35, 12, 37)	(48, 14, 50)	(63, 16, 65)
$b = 2$	(5, 12, 13)	(12, 16, 20)	(21, 20, 29)	(32, 24, 40)	(45, 28, 53)	(60, 32, 68)	(77, 36, 85)
$b = 3$	(7, 24, 25)	(16, 30, 34)	(27, 36, 45)	(40, 42, 58)	(55, 48, 73)	(72, 54, 90)	(91, 60, 109)
$b = 4$	(9, 40, 41)	(20, 48, 52)	(33, 56, 65)	(48, 64, 80)	(65, 72, 97)	(84, 80, 116)	(105, 88, 137)
$b = 5$	(11, 60, 61)	(24, 70, 74)	(39, 80, 89)	(56, 90, 106)	(75, 100, 125)	(96, 110, 146)	(119, 120, 169)
$b = 6$	(13, 84, 85)	(28, 96, 100)	(45, 108, 117)	(64, 120, 136)	(85, 132, 157)	(108, 144, 180)	(133, 156, 205)

Les triplets soulignés sont ceux de la famille presque isocèle de la Section 2.4 : ils ne suivent ni ligne ni colonne, mais longent la droite $a = b\sqrt{2}$ (leurs graines, $a/b = 1/1, 3/2$ puis $7/5$, sont les réduites de $\sqrt{2}$). Le triplet (3, 4, 5) occupe le coin, commun aux trois familles. Les colonnes suivantes sont les familles à défaut $z - y = 4, 9, 16, \dots$ et les lignes suivantes celles à défaut $z - x = 8, 18, 32, \dots$, conformément à (8). La table complète pour $a, b \leq 10$ figure dans l'abaque, en fin de volume.

2.4. La troisième famille : les réduites de $\sqrt{2}$

Les deux familles précédentes s'obtenaient en fixant un défaut à sa plus petite valeur. La troisième s'obtient en rendant minimale leur *différence*.

Pourquoi $\sqrt{2}$. Un triplet est isocèle lorsque $x = y$. D'après (2), cela s'écrit $a^2 = 2b^2$, soit

$$a = b\sqrt{2}.$$

Le $\sqrt{2}$ n'a donc rien d'accidentel : les deux défauts sont a^2 et $2b^2$, et c'est le facteur 2 de l'un d'eux qui le produit. La droite $a = b\sqrt{2}$ est aussi celle des points fixes de l'involution φ de la Proposition 1.5, ce qui était prévisible : un triplet est son propre échangé exactement quand ses deux cathètes coïncident.

Cette droite ne porte aucun point entier, $\sqrt{2}$ étant irrationnel. Il n'y a donc pas de triangle rectangle isocèle en nombres entiers, et la question devient : quels triplets entiers en approchent le plus ? La troisième identité de (2) répond sans calcul.

L'équation de Pell.

THÉORÈME 2.2. *Pour a, b entiers, le triplet (1) vérifie $|x - y| = 1$ si et seulement si*

$$a^2 - 2b^2 = \pm 1.$$

DÉMONSTRATION. $x - y = (z - y) - (z - x) = a^2 - 2b^2$ par (2). □

L'équation de Pell apparaît donc comme une identité, et non au terme d'un calcul : dans ces coordonnées, la différence des cathètes est la forme quadratique $a^2 - 2b^2$. Ses solutions entières sont classiquement les réduites a/b du développement $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$. Les triangles rectangles en nombres entiers dont les cathètes diffèrent de 1 forment eux-mêmes une famille connue, dont la recherche remonte au XVII^e siècle, à Fermat et à Frénicle de Bessy [5]. On obtient ainsi :

a	b	x	y	z	$x - y$	plus petit angle
1	1	3	4	5	-1	36,8699°
3	2	21	20	29	+1	43,6028°
7	5	119	120	169	-1	44,7603°
17	12	697	696	985	+1	44,9589°
41	29	4059	4060	5741	-1	44,9929°
99	70	23661	23660	33461	+1	44,9988°
239	169	137903	137904	195025	-1	44,9998°
577	408	803761	803760	1136689	+1	45,0000°

Le signe de $x - y$ alterne : les réduites encadrent $\sqrt{2}$ tour à tour par défaut et par excès, et les triangles correspondants sont alternativement un peu trop plats et un peu trop redressés. L'écart $|a/b - \sqrt{2}|$ est divisé à chaque étape par un facteur qui tend vers $3 + 2\sqrt{2} \approx 5,83$ (les premiers rapports valent 4,83 ; 6,04 ; 5,79 ; 5,83).

Un pas de Fibonacci pour passer d'un triplet au suivant. Les solutions de Pell s'engendrent par $(a, b) \mapsto (a + 2b, a + b)$ depuis $(1, 1)$. Or $a + 2b = d$ et $a + b = c$: ce sont les deux termes suivants de la suite de Fibonacci construite sur (a, b) .

PROPOSITION 2.3. *Le passage d'un triplet presque isocèle au suivant est*

$$(a, b) \mapsto (d, c),$$

c'est-à-dire deux pas de la récurrence de Fibonacci suivis de l'échange des deux termes.

DÉMONSTRATION. Un pas de Fibonacci envoie (a, b) sur $(b, a + b)$, donc deux pas donnent $(a + b, a + 2b) = (c, d)$. L'échange donne $(d, c) = (a + 2b, a + b)$, qui est le pas de Pell. $\square$

La famille s'engendre donc par l'opération même qui construit le triplet : on prolonge le couple de deux termes, on échange ces deux derniers, et l'on repart de là. En partant de $(1, 1)$:

$$1, 1, \underline{2}, \underline{3} \longrightarrow (3, 2), \quad 3, 2, \underline{5}, \underline{7} \longrightarrow (7, 5), \quad 7, 5, \underline{12}, \underline{17} \longrightarrow (17, 12), \quad \dots$$

Les hypoténuses obtenues,

$$5, \quad 29, \quad 169, \quad 985, \quad 5741, \quad 33461, \quad 195025, \quad \dots$$

vérifient $z_{n+1} = 6z_n - z_{n-1}$: les graines sont multipliées à chaque pas par environ $1 + \sqrt{2}$, les côtés, qui sont de degré 2, par environ $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, racine de $t^2 = 6t - 1$.

Les écarts réalisables, et où les deux premières familles se frôlent. La troisième famille se lit encore autrement : dans la liste des écarts que les deux premières savent produire.

Sur un triplet irréductible, a et b sont entiers et a est impair (Proposition 1.6). Les deux écarts à l'hypoténuse ne prennent donc que deux formes :

$$z - y = a^2 \text{ avec } a \text{ impair}, \quad z - x = 2b^2.$$

Les carrés impairs d'un côté, les doubles de carrés de l'autre — et rien entre les deux. Un écart de 3, de 4 ou de 5 est hors de portée d'un triplet irréductible, alors qu'il s'obtient aisément sur un agrandissement.

Voici les cinquante premières valeurs réalisables, chacune avec le plus petit triplet irréductible qui l'atteint. Dans les colonnes a et b , la graine en gras est celle qui fournit l'écart ; lue de haut en bas, elle donne le mot de la section 2.5. Encadrés par deux filets, et en gras dans les deux dernières colonnes, les couples d'écarts consécutifs distants de 1.

a	b	(x, y, z)	écart
1	1	(3, 4, 5)	$z - y = 1$
1	1	(3, 4, 5)	$z - x = 2$
1	2	(5, 12, 13)	$z - x = 8$
3	1	(15, 8, 17)	$z - y = 9$
1	3	(7, 24, 25)	$z - x = 18$
5	1	(35, 12, 37)	$z - y = 25$
1	4	(9, 40, 41)	$z - x = 32$
7	1	(63, 16, 65)	$z - y = 49$
1	5	(11, 60, 61)	$z - x = 50$
1	6	(13, 84, 85)	$z - x = 72$
9	1	(99, 20, 101)	$z - y = 81$
1	7	(15, 112, 113)	$z - x = 98$
11	1	(143, 24, 145)	$z - y = 121$
1	8	(17, 144, 145)	$z - x = 128$
1	9	(19, 180, 181)	$z - x = 162$
13	1	(195, 28, 197)	$z - y = 169$
1	10	(21, 220, 221)	$z - x = 200$
15	1	(255, 32, 257)	$z - y = 225$
1	11	(23, 264, 265)	$z - x = 242$
1	12	(25, 312, 313)	$z - x = 288$
17	1	(323, 36, 325)	$z - y = 289$
1	13	(27, 364, 365)	$z - x = 338$
19	1	(399, 40, 401)	$z - y = 361$
1	14	(29, 420, 421)	$z - x = 392$
21	1	(483, 44, 485)	$z - y = 441$
1	15	(31, 480, 481)	$z - x = 450$
1	16	(33, 544, 545)	$z - x = 512$
23	1	(575, 48, 577)	$z - y = 529$
1	17	(35, 612, 613)	$z - x = 578$
25	1	(675, 52, 677)	$z - y = 625$
1	18	(37, 684, 685)	$z - x = 648$
1	19	(39, 760, 761)	$z - x = 722$
27	1	(783, 56, 785)	$z - y = 729$
1	20	(41, 840, 841)	$z - x = 800$
29	1	(899, 60, 901)	$z - y = 841$
1	21	(43, 924, 925)	$z - x = 882$
31	1	(1023, 64, 1025)	$z - y = 961$
1	22	(45, 1012, 1013)	$z - x = 968$
1	23	(47, 1104, 1105)	$z - x = 1058$
33	1	(1155, 68, 1157)	$z - y = 1089$
1	24	(49, 1200, 1201)	$z - x = 1152$
35	1	(1295, 72, 1297)	$z - y = 1225$
1	25	(51, 1300, 1301)	$z - x = 1250$
1	26	(53, 1404, 1405)	$z - x = 1352$
37	1	(1443, 76, 1445)	$z - y = 1369$
1	27	(55, 1512, 1513)	$z - x = 1458$
39	1	(1599, 80, 1601)	$z - y = 1521$
1	28	(57, 1624, 1625)	$z - x = 1568$

suite page suivante

a	b	(x, y, z)	écart
41	1	(1763, 84, 1765)	$z - y = 1681$
1	29	(59, 1740, 1741)	$z - x = 1682$

Toutes les lignes ont $a = 1$ ou $b = 1$: le plus petit représentant d'un écart réalisable appartient toujours à l'une des deux premières familles. Les valeurs de a sont les impairs $1, 3, 5, \dots, 41$ sans exception, celles de b les entiers $1, 2, 3, \dots, 29$ sans exception : vingt-et-une valeurs pour a , vingt-neuf pour b . Lue de haut en bas, la colonne des écarts forme un mot sur deux lettres, selon que la valeur vient d'un carré impair ou d'un double de carré ; ce mot est étudié à la section 2.5.

PROPOSITION 2.4. *Aucun écart n'est réalisable de deux façons : les ensembles $\{a^2\}$ et $\{2b^2\}$ sont disjoints.*

DÉMONSTRATION. $a^2 = 2b^2$ imposerait $a = b\sqrt{2}$ avec a, b entiers. $\square$

Deux écarts réalisables consécutifs sont en général éloignés, et la distance entre eux croît en moyenne, sans être monotone (les premières valent $1, 6, 1, 9, 7, 7, 17, 1, 22, \dots$). Elle retombe même à 1 une infinité de fois, et la proposition suivante dit exactement quand.

PROPOSITION 2.5. *Deux écarts réalisables consécutifs diffèrent de 1 si et seulement s'ils valent a^2 et $2b^2$ avec $a^2 - 2b^2 = \pm 1$, c'est-à-dire si (a, b) est une réduite de $\sqrt{2}$.*

DÉMONSTRATION. Deux carrés impairs distincts diffèrent d'au moins 8, deux doubles de carrés d'au moins 6 : une différence de 1 ne peut opposer que les deux formes. Elle s'écrit alors $|a^2 - 2b^2| = 1$, l'équation du Théorème 2.2. Réciproquement, deux entiers distants de 1 sont consécutifs dans toute liste croissante. $\square$

a	b	écarts	$a^2 - 2b^2$
1	1	1 et 2	-1
3	2	8 et 9	+1
7	5	49 et 50	-1
17	12	288 et 289	+1
41	29	1681 et 1682	-1
99	70	9800 et 9801	+1
239	169	57121 et 57122	-1

La troisième famille est donc exactement l'ensemble des endroits où les deux premières se frôlent. Et la table des cinquante premiers écarts s'arrête sur l'un de ces couples, $1681 = 41^2$ et $1682 = 2 \cdot 29^2$.

REMARQUE 2.6 (Trois optima, deux comportements). Les trois familles réalisent le même optimum, chacune sur sa paire de côtés, mais ne se comportent pas de même à l'infini. Dans la famille $a = 1$, l'écart vaut 1 et le rapport tend vers 1, puisque $z/y = 1 + 1/2b(b+1)$: pour $b = 1000$, $z/y = 1,0000005$. Les angles, eux, tendent vers 0° et 90° — $36,9^\circ$ pour $(3, 4, 5)$, mais $0,06^\circ$ pour $b = 1000$ — de sorte que le triangle s'effile : deux côtés se rapprochent, et c'est le troisième qui s'efface. Il en va de même dans la famille $b = 1$, dont le plus petit angle passe de $36,9^\circ$ pour $a = 1$ à $0,11^\circ$ pour $a = 1000$.

Ces deux comportements ont une lecture physique (chapitre 5), où la cathète x est une masse, la cathète y une impulsion et l'hypoténuse une énergie. Dans la famille $a = 1$, l'écart

à la lumière $z - y = 1$ est constant : les triangles s'aplatissent sur la cathète y , les particules vont de plus en plus vite, et leur cas limite est la graine $a = 0$, le triangle sans masse $(0, 2, 2)$, c'est-à-dire le photon, qu'aucune ne rejoint. Dans la famille $b = 1$, l'énergie cinétique $z - x = 2$ est constante : les triangles s'aplatissent sur la cathète x , les particules ralentissent, et leur cas limite est la graine $b = 0$, le triangle $(1, 0, 1)$ d'un corps au repos. La troisième famille, elle, tend vers la vitesse $\sqrt{2}/2$.

Les formes des deux premières familles convergent donc aussi, mais vers un triangle dégénéré. La troisième est la seule dont la forme converge vers un vrai triangle, le 45-45-90, parce qu'elle est la seule à contraindre les deux cathètes l'une par rapport à l'autre : $z = y$ est impossible dans un triangle rectangle, alors que $x = y$ décrit un triangle bien réel. C'est ce qui vaut à la troisième de porter seule, dans l'usage, le nom de presque isocèle ; les trois n'en sont pas moins extrémales, chacune sur sa paire.

2.5. Le mot des écarts

Les écarts réalisables sont les carrés impairs a^2 et les doubles de carrés $2b^2$. Rangeons-les par ordre croissant et notons **a** ou **b** selon la forme dont chacun provient : la colonne « écart » de la table des cinquante premiers écarts (Section 2.4), lue de haut en bas, devient un mot infini sur deux lettres. C'est aussi, dans cette table, la position de la graine en gras : première colonne pour **a**, seconde pour **b**. En voici les cinquante premières lettres, une par ligne :

$$w = \text{abbabababbababbababbabababbababbabababbababab} \dots$$

Cette section en rassemble les propriétés, sans démonstration.

Les rangs. L'écart v^2 , pour v impair, occupe le rang $\frac{v+1}{2} + \lfloor v/\sqrt{2} \rfloor$, et l'écart $2u^2$ le rang $\lfloor (u\sqrt{2}+1)/2 \rfloor + u$. Le k -ième a occupe donc la position $\lfloor k(1+\sqrt{2}) - 1/\sqrt{2} \rfloor$. Ces formules ne sont que des comptages : combien de carrés impairs, combien de doubles de carrés, en deçà d'une valeur donnée.

Le mot est sturmien. Le nombre de **a** parmi les n premières lettres vaut $\lfloor n\alpha + 1/\sqrt{2} \rfloor$ avec $\alpha = \sqrt{2} - 1$. Autrement dit w est le mot mécanique de pente α et d'intercept $1/\sqrt{2}$: la n -ième lettre est **a** si $\lfloor n\alpha + 1/\sqrt{2} \rfloor$ dépasse $\lfloor (n-1)\alpha + 1/\sqrt{2} \rfloor$. La pente étant irrationnelle, w est un mot sturmien : il n'est pas périodique, il compte exactement $k+1$ facteurs de longueur k , et il est équilibré. La densité des **a** vaut $\sqrt{2} - 1$.

La substitution. Découpé juste avant chaque $\mathbf{a}$, le mot n'offre que deux blocs, $\mathbf{ab}$ et $\mathbf{abb}$ — parce que $1 < \sqrt{2} < 2$. En notant $\mathbf{a}$ le bloc $\mathbf{abb}$ et $\mathbf{b}$ le bloc $\mathbf{ab}$, on retrouve le mot : il est le point fixe de

$$\sigma : a \mapsto abb, \quad b \mapsto ab.$$

En itérant σ à partir de $\mathbf{a}$, les préfixes obtenus ont pour longueurs $1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, \dots$: ce sont les a des couples de la Proposition 2.5, là où les deux premières familles se frôlent. Le mot garde donc la trace des triplets presque isocèles.

2.6. Ce que le mot code

Ranger les écarts, c'est comparer un carré impair a^2 à un double de carré $2b^2$, c'est-à-dire décider si a/b est inférieur ou supérieur à $\sqrt{2}$. Le mot des écarts n'est donc pas un objet propre aux triplets : c'est la trace de $\sqrt{2}$ sur les rationnels a/b . Le 2 est celui de $z - x = 2b^2$, et c'est le $n = 2$ de la Section 3 ; les frôlements à 1 — a^2 et $2b^2$ consécutifs et distants de 1 — sont les couples où $|a^2 - 2b^2| = 1$, les graines de la troisième famille.

Rien n'empêche alors de remplacer 2 par un entier n quelconque. Comparer a^2 à nb^2 est le test qui pilote la Section 3, et le mot qu'il produit, lu b par b , est l'objet de ce qui suit.

Une famille par racine carrée

3.1. Le principe

Les deux défauts d'hypoténuse d'un triplet valent $z - y = a^2$ et $z - x = 2b^2$. Leur rapport ne dépend donc que du rapport des graines : en posant $t = a/b$,

$$(9) \quad \frac{z - y}{z - x} = \frac{a^2}{2b^2} = \frac{t^2}{2}.$$

Fixer ce rapport, c'est fixer t . Demander

$$\frac{z - y}{z - x} = \frac{n}{2} \quad \text{revient à} \quad t = \sqrt{n}.$$

Pour $n = 2$ on retrouve $z - y = z - x$, c'est-à-dire $x = y$: la famille presque isocèle, celle des réduites de $\sqrt{2}$. Les autres valeurs de n donnent autant de familles nouvelles, une par racine carrée.

En termes de côtés, la condition $n(z - x) = 2(z - y)$ s'écrit

$$(10) \quad nx - 2y + (2 - n)z = 0,$$

et le calcul donne l'identité qui gouverne tout ce qui suit :

$$(11) \quad nx - 2y + (2 - n)z = 2(a^2 - nb^2).$$

L'écart à la relation voulue est exactement le double de la forme de Pell.

3.2. Le choix des graines

Si n est un carré parfait, $\sqrt{n}$ est entier et la relation est vérifiée exactement, par toutes les graines de la droite $a = \sqrt{n}b$: la famille est portée par une droite, comme les familles $a = 1$ et $b = 1$ — à ceci près que cette droite-ci passe par l'origine et ne porte donc qu'une seule forme de triangle, agrandie de toutes les façons, là où $a = 1$ et $b = 1$ en portent une infinité. Il n'y a rien de plus à dire.

Si n n'est pas un carré, $\sqrt{n}$ est irrationnel et aucune graine entière ne peut vérifier $a = b\sqrt{n}$. La famille est alors du troisième type : celle des graines qui longent la droite au plus près. D'après (11), « au plus près » signifie rendre $|a^2 - nb^2|$ minimal, et le minimum non nul vaut 1 dès que l'équation de Pell

$$a^2 - nb^2 = \pm 1$$

a des solutions — ce qui est le cas pour tout n non carré.

L'algorithme. Deux façons de produire les graines, qui donnent la même liste.

Par la fraction continue. Développer $\sqrt{n}$ en fraction continue ; elle est périodique, $\sqrt{n}$ étant du second degré (théorème de Lagrange). Calculer les réduites p/q et retenir celles pour lesquelles $|p^2 - nq^2| = 1$. Elles tombent à la fin de chaque période. Les graines sont $(a, b) = (p, q)$.

Par récurrence. Chercher la plus petite solution (a_1, b_1) de $a^2 - nb^2 = \pm 1$ — en essayant $b = 1, 2, 3, \dots$ et en regardant si $nb^2 \pm 1$ est un carré. Ce balayage peut être très long : pour $n = 61$, la plus petite solution est $(29718, 3805)$. Toutes les autres s'en déduisent par

$$(12) \quad (a, b) \mapsto (a_1 a + n b_1 b, \quad b_1 a + a_1 b),$$

qui est la multiplication par $a_1 + b_1 \sqrt{n}$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ et laisse la forme $a^2 - nb^2$ invariante au signe près. Chaque pas multiplie donc la taille des graines par $a_1 + b_1 \sqrt{n}$.

Le pas (12) est l'analogie exact de celui de la famille presque isocèle (Proposition 2.3) : pour $n = 2$, la plus petite solution est $(1, 1)$ et l'on retrouve $(a, b) \mapsto (a+2b, a+b)$, c'est-à-dire deux crans de Fibonacci suivis d'un échange.

3.3. Retrouver l'algorithme sans les fractions continues

Les deux méthodes précédentes supposent connue une donnée extérieure : le développement de $\sqrt{n}$, ou au moins sa plus petite solution de Pell. On peut se passer des deux. Il suffit d'encadrer, et de ne jamais faire autre chose que comparer deux entiers.

Les bornes. On tient deux couples, G trop petit et D trop grand, et l'on resserre. Le premier encadrement ne demande aucun calcul :

$$G = (0, 1), \quad D = (1, 0).$$

Le premier est le rapport 0. Le second n'a pas de rapport fini — son dénominateur est nul — et joue le rôle de $+\infty$: tout rapport positif lui est inférieur. N'importe quel irrationnel positif est donc encadré par ces deux-là, sans qu'on ait eu besoin de savoir quoi que ce soit sur lui. Ce sont les deux bornes de l'arbre de Stern–Brocot.

Le pas. On forme la *médiane* des deux bornes, c'est-à-dire la somme terme à terme,

$$M = (a_G + a_D, \quad b_G + b_D),$$

qui tombe toujours strictement entre les deux rapports. On la teste :

$$a_M^2 < n b_M^2 \implies M \text{ est trop petit, on pose } G = M \quad (\text{mouvement } \mathbf{G}),$$

$$a_M^2 > n b_M^2 \implies M \text{ est trop grand, on pose } D = M \quad (\text{mouvement } \mathbf{D}).$$

L'égalité n'arrive jamais, n n'étant pas un carré. Aucune racine carrée n'intervient, aucune division : deux multiplications et une comparaison d'entiers.

Pourquoi l'encadrement reste propre. Les deux bornes vérifient au départ $a_G b_D - a_D b_G = -1$, et la médiane conserve exactement cette quantité, quel que soit le côté choisi. Cette relation de voisinage a trois conséquences : toute médiane produite est déjà irréductible, aucune fraction n'est produite deux fois, et l'intervalle se resserre. C'est ce déterminant égal à -1 qui garantit le procédé.

Ce qu'on récupère. Trois choses.

Les couples pour lesquels $|a^2 - nb^2| = 1$ apparaissent en cours de route : ce sont les graines de la famille.

Les longueurs des plages de lettres identiques dans le mot des mouvements sont les quotients de la fraction continue de $\sqrt{n}$, qu'on n'a pas eu à calculer.

La périodicité de ces longueurs se voit sur les exemples ; qu'elle dure indéfiniment, c'est le théorème de Lagrange qui le garantit.

Un second procédé, qui n'encadre pas mais lit directement la plus grande graine a sous chaque $b\sqrt{n}$, est donné à la section 3.4 ; il produit un autre mot, sturmien celui-là, dont le découpage redonne la même fraction continue.

Sur $n = 2$, les huit premiers pas :

pas	médiane	test	mouvement	Pell
1	(1, 1)	$1 < 2$	G	$a^2 - 2b^2 = -1$
2	(2, 1)	$4 > 2$	D	
3	(3, 2)	$9 > 8$	D	$a^2 - 2b^2 = +1$
4	(4, 3)	$16 < 18$	G	
5	(7, 5)	$49 < 50$	G	$a^2 - 2b^2 = -1$
6	(10, 7)	$100 > 98$	D	
7	(17, 12)	$289 > 288$	D	$a^2 - 2b^2 = +1$
8	(24, 17)	$576 < 578$	G	

Le mot commence par GDDGGDDG, ses plages valent 1, 2, 2, 2, ..., et $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$. Une médiane sur deux est une graine, et les couples (1, 1), (3, 2), (7, 5), (17, 12) sont ceux de la Section 2.4.

Les quatre premiers cas non carrés donnent :

n	mot des mouvements	plages, soit la fraction continue
2	GDDGGDDGGDDGG...	1, 2, 2, 2, 2, ...
3	GDGGDGGDGGDGG...	1, 1, 2, 1, 2, ...
5	GGDDDDGGGGDDDD...	2, 4, 4, 4, ...
7	GGDGDGGGGDGDGG...	2, 1, 1, 1, 4, ...

Le test, vu du triangle. La comparaison qui pilote la descente n'est pas seulement arithmétique. D'après (9),

$$a^2 < nb^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (z - y) < \frac{n}{2}(z - x),$$

c'est-à-dire : le défaut à la cathète paire est-il, ou non, dans le rapport voulu avec l'autre ? On construit un triangle, on compare ses deux défauts d'hypoténuse, et le résultat dit de quel côté chercher le suivant. L'équation de Pell se résout ainsi en parcourant des triangles rectangles.

Le déplacement, lui, reste du côté des graines : la médiane additionne deux couples, et le triangle de graines $(a + a', b + b')$ ne se déduit pas simplement des deux triangles précédents : ses côtés contiennent des termes croisés comme $ad' + a'd$. Le critère se lit sur les triangles, le pas se fait dans le réseau.

3.4. Le mot des sauts

Soit $n \geq 2$ un entier qui n'est pas un carré.

Les graines. Pour chaque $b \geq 1$, on pose

$$a_b = \text{le plus grand entier } a \text{ tel que } a^2 < nb^2.$$

Cette définition ne demande qu'une racine carrée entière et une comparaison d'entiers. Comme n n'est pas un carré, nb^2 n'en est jamais un, et a_b vaut $\lfloor b\sqrt{n} \rfloor$ — mais on n'a pas eu besoin de le savoir pour le calculer. On note au passage la valeur de la forme,

$$f(b) = a_b^2 - nb^2,$$

toujours strictement négative par construction.

Le mot. Les sauts $a_{b+1} - a_b$ ne prennent que deux valeurs, et ce sont deux entiers consécutifs : en effet a_b croît en moyenne de $\sqrt{n}$ à chaque pas, et une partie entière ne peut sauter que de $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ou de $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$. Posons

$$\delta = a_1 \quad (\text{le saut court}), \quad \delta + 1 \quad (\text{le saut long}),$$

et écrivons **C** pour un saut court, **L** pour un saut long. On obtient un mot infini sur $\{\mathbf{C}, \mathbf{L}\}$.

Le découpage. On coupe le mot juste avant chaque **L**. Si le mot commence par des **C**, ce préfixe ne forme pas un bloc et on le laisse de côté. Les morceaux sont ensuite de la forme $\mathbf{LC}^m$, et là encore il n'y a que deux longueurs possibles, m et $m + 1$, pour la même raison. On lit un nombre et on recommence :

quotient = longueur du bloc court ;
recodage : bloc long $\mapsto \mathbf{L}$, bloc court $\mapsto \mathbf{C}$.

La suite des quotients ainsi lus, précédée de δ , est la fraction continue de $\sqrt{n}$ (vérifié pour $n = 2, 3, 5, 6, 7, 13, 19, 21$; cette section n'en donne pas la démonstration).

Les graines remarquables. Parmi les couples (a_b, b) et $(a_b + 1, b)$, ceux qui vérifient $|a^2 - nb^2| = 1$ sont les graines d'une famille de triplets pythagoriciens : celle dont les deux défauts d'hypoténuse sont dans le rapport $n/2$, puisque $z - y = a^2$ et $z - x = 2b^2$.

Le cas $n = 2$. Le mot des sauts a alors la même pente $\sqrt{2} - 1$ et la même substitution que le mot des écarts, $\mathbf{L} \mapsto \mathbf{LCC}$, $\mathbf{C} \mapsto \mathbf{LC}$, avec **L** pour **a** et **C** pour **b** ; les deux mots ont les mêmes facteurs, et tout préfixe de l'un se retrouve dans l'autre. Ce n'est pourtant pas le même mot : le mot des écarts compte les carrés impairs entre deux doubles de carrés consécutifs, le mot des sauts compte tous les entiers entre $b\sqrt{2}$ et $(b + 1)\sqrt{2}$, et les deux mots mécaniques ont la même pente mais pas la même origine. Ses graines remarquables sont $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(7, 5)$, $(17, 12)$, $(41, 29)$: la troisième famille.

3.5. Exemples des racines de 3, 5 et 7

$n = 3$.

La famille. $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots]$, plus petite solution $(2, 1)$ avec $a^2 - 3b^2 = +1$, pas $(a, b) \mapsto (2a + 3b, a + 2b)$, croissance $2 + \sqrt{3} \approx 3,73$.

(a, b)	(x, y, z)	$a^2 - 3b^2$	$(z - y)/(z - x)$
(2, 1)	(8, 6, 10)	+1	2,000000000
(7, 4)	(105, 88, 137)	+1	1,531250000
(26, 15)	(1456, 1230, 1906)	+1	1,502222222
(97, 56)	(20273, 17136, 26545)	+1	1,500159439
(362, 209)	(282360, 238678, 369722)	+1	1,500011447

Le rapport des défauts tend vers $3/2$, et a/b vers $\sqrt{3} = 1,732050808 : 2 ; 1,75 ; 1,733333 ; 1,732143 ; 1,732057$.

Les graines. On calcule a_b de proche en proche. Aucun irrationnel n'intervient : pour chaque b , on cherche le plus grand a avec $a^2 < 3b^2$.

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_b	1	3	5	6	8	10	12	13	15	17	19	20
$f(b)$	-2	-3	-2	-12	-11	-8	-3	-23	-18	-11	-2	-32
saut	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	1	

La première valeur donne $\delta = a_1 = 1$: c'est la partie entière de $\sqrt{3}$, et la longueur du saut court. Elle ouvre la fraction continue, avant les quotients que le découpage va lire. Le premier saut, de a_1 à a_2 , vaut 2 : c'est un saut long. Les sauts valent 1 ou 2, jamais autre chose.

Le mot. En écrivant C pour un saut de 1 et L pour un saut de 2 :

$$w = \text{LLCLLLCLLLCLLLCLLLCLLLCLLLCLLLC} \dots$$

Ce mot n'est pas périodique. Il est équilibré, et il ne contient que $k + 1$ facteurs de longueur k : c'est un mot sturmien. Sa pente, c'est-à-dire la densité des L, vaut $\sqrt{3} - 1 = 0,7320508 \dots$ — mais cette valeur est une conséquence, pas une donnée.

La fraction continue. On coupe avant chaque L et l'on itère.

niveau	début du mot	blocs	quotient
0	LLCLLLCLLLCLLLCLLLC	L, LC	1
1	CLCCLCCLCCLCCLCCLC	LC, LCC	2
2	LLCLLLCLLLCLLLCLLLC	L, LC	1
3	CLCCLCCLCCLCCLCCLC	LC, LCC	2

Les quotients lus sont 1, 2, 1, 2, ... et, en tête, la partie entière $\delta = 1$:

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots].$$

Les niveaux 2 et 3 reproduisent à l'identique les niveaux 0 et 1 : le découpage revient au point de départ au bout de deux niveaux, et c'est la périodicité de la fraction continue, constatée sur le mot.

Les graines remarquables et leurs triangles. En balayant les b et en testant a_b puis $a_b + 1$, les couples qui donnent $|a^2 - 3b^2| = 1$ sont

$$(2, 1), \quad (7, 4), \quad (26, 15), \quad (97, 56), \quad (362, 209), \dots$$

tous avec $a^2 - 3b^2 = +1$. Une fois le premier trouvé, le balayage devient inutile : la règle

$$(a, b) \mapsto (2a + 3b, a + 2b)$$

donne tous les suivants.

Le rapport des deux défauts d'hypoténuse tend vers $3/2$, ce qui est une autre écriture de $a/b \rightarrow \sqrt{3}$.

$n = 5$.

La famille. $\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, \dots]$, plus petite solution $(2, 1)$ avec $a^2 - 5b^2 = -1$, pas $(a, b) \mapsto (2a + 5b, a + 2b)$, croissance $2 + \sqrt{5} \approx 4,24$.

(a, b)	(x, y, z)	$a^2 - 5b^2$	$(z - y)/(z - x)$
(2, 1)	(8, 6, 10)	-1	2,000000000
(9, 4)	(153, 104, 185)	+1	2,531250000
(38, 17)	(2736, 1870, 3314)	-1	2,498269896
(161, 72)	(49105, 33552, 59473)	+1	2,500096451
(682, 305)	(881144, 602070, 1067194)	-1	2,499994625

La période de $\sqrt{5}$ étant de longueur impaire, le signe alterne, et le rapport des défauts approche $5/2$ tantôt par en dessous, tantôt par au-dessus.

Le mot des sauts.

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_b	2	4	6	8	11	13	15	17	20	22	24	26
$f(b)$	-1	-4	-9	-16	-4	-11	-20	-31	-5	-16	-29	-44
saut	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	

$\delta = a_1 = 2$, les sauts valent 2 ou 3, et le mot est

$$w = \text{CCCLCCCLCCCLCCCLCCCLCCCLCCCL} \dots$$

Le découpage donne les blocs LCCC et LCCCC, donc le quotient 4 ; et le recodage redonne le mot lui-même, à l'identique. Le mot est point fixe de sa propre substitution, tous les quotients valent 4 :

$$\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, 4, \dots].$$

Les graines à $|a^2 - 5b^2| = 1$ sont $(2, 1)$, $(9, 4)$, $(38, 17)$, $(161, 72)$, $(682, 305)$, avec la règle $(a, b) \mapsto (2a + 5b, a + 2b)$. Le signe de la forme alterne, -1 puis $+1$, la période de la fraction continue étant de longueur impaire.

$n = 7$.

La famille. $\sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 4, \dots]$, plus petite solution $(8, 3)$ avec $a^2 - 7b^2 = +1$, pas $(a, b) \mapsto (8a + 21b, 3a + 8b)$, croissance $8 + 3\sqrt{7} \approx 15,94$.

(a, b)	(x, y, z)	$a^2 - 7b^2$	$(z - y)/(z - x)$
$(8, 3)$	$(112, 66, 130)$	+1	3,555555556
$(127, 48)$	$(28321, 16800, 32929)$	+1	3,500217014
$(2024, 765)$	$(7193296, 4267170, 8363746)$	+1	3,500000854
$(32257, 12192)$	$(1827068737, 1083844416, 2124358465)$	+1	3,500000003

La période de $\sqrt{7}$ est de longueur 4 : une réduite sur quatre seulement donne ± 1 , et l'équation $a^2 - 7b^2 = -1$ n'a aucune solution. Les graines croissent d'un facteur 16 à chaque pas, et la convergence est d'autant plus rapide.

Le mot des sauts.

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_b	2	5	7	10	13	15	18	21	23	26	29	31
$f(b)$	-3	-3	-14	-12	-6	-27	-19	-7	-38	-24	-6	-47
saut	3	2	3	3	2	3	3	2	3	3	2	

$\delta = a_1 = 2$, les sauts valent 2 ou 3, et

$$w = \text{LCLLCLLCLLCLLCLLCLLCLLCLLCLLCLLCL} \dots$$

Ici le découpage met quatre niveaux à revenir sur lui-même :

niveau	début du mot	blocs	quotient
0	LCLLCLLCLLCLLCLLCLLCLLCLLCLLCLLCL	L, LC	1
1	LCLCLCLLCLLCLLCLLCLLCLLCLLCLLCLLCL	L, LC	1
2	LLLLCLLLLLCLLLLLCLLLLLCLLLLLCLLLLLCL	L, LC	1
3	CCCLCCCLCCCLCCCLCCCLCCCLCCCLCCCLCCCL	LCCC, LCCCC	4

d'où

$$\sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots].$$

La période est de longueur 4. Les graines à $|a^2 - 7b^2| = 1$ sont donc plus rares : $(8, 3)$, $(127, 48)$, $(2024, 765)$, $(32257, 12192)$, avec la règle $(a, b) \mapsto (8a + 21b, 3a + 8b)$, et l'équation $a^2 - 7b^2 = -1$ n'a aucune solution.

3.6. Ce que l'on observe

Les trois cas suivent le même schéma, et rien n'y est propre à 3, 5 ou 7.

Un seul mot. Il n'y a qu'un objet, le mot des sauts. La fraction continue en est le résumé, obtenu par découpages successifs ; les graines remarquables en sont les points saillants ; les triplets en découlent par la formule. Le mot est sturmien, donc apériodique, alors que la suite des quotients, elle, est périodique : ce sont deux niveaux différents de lecture du même objet, et c'est le découpage qui fait passer de l'un à l'autre.

Ce que gouverne la longueur de la période. Elle vaut 1 pour $\sqrt{5}$, 2 pour $\sqrt{3}$, 4 pour $\sqrt{7}$. C'est le nombre de niveaux avant que le découpage ne se répète, et c'est aussi l'espacement des graines remarquables parmi les réduites : une réduite sur 1, sur 2 ou sur 4. Elle ne gouverne pas, en revanche, la vitesse à laquelle les graines grandissent, qui est le facteur $a_1 + b_1\sqrt{n}$ de la plus petite solution de Pell : $\sqrt{5}$, de période 1, croît d'un facteur 4,24, plus vite que $\sqrt{3}$, de période 2 (3,73) ; $\sqrt{11}$, de période 2, croît d'un facteur 19,95, plus vite que $\sqrt{7}$, de période 4 (15,94).

Où s'arrête le procédé. Le mot des sauts existe pour n'importe quel irrationnel, mais le découpage ne se répète que si la suite des quotients est ultimement périodique, c'est-à-dire, par le théorème de Lagrange, pour les irrationnels du second degré. Pour π , chaque niveau obéit à une règle différente, et aucune substitution n'engendre le mot. Les racines carrées d'entiers non carrés sont donc exactement le terrain de ce procédé.

Les autres pentes. Le découpage ne doit rien à $\sqrt{2}$: pour une pente irrationnelle quelconque il donne toujours exactement deux blocs, et le plus court contient un **b** de moins que le premier quotient de la fraction continue.

pente	fraction continue	blocs
$\varphi - 1$	$[0; 1, 1, 1, 1, \dots]$	a, ab
$\sqrt{2} - 1$	$[0; 2, 2, 2, 2, \dots]$	ab, abb
$\sqrt{3} - 1$	$[0; 1, 2, 1, 2, \dots]$	a, ab
$\sqrt{5} - 2$	$[0; 4, 4, 4, 4, \dots]$	abbb, abbbb
$\pi - 3$	$[0; 7, 15, 1, 292, \dots]$	abbbbb, abbbbbbb
$e - 2$	$[0; 1, 2, 1, 1, 4, \dots]$	a, ab

Mais les étages du découpage ne finissent par se répéter que si la suite des quotients se répète, donc si la fraction continue est ultimement périodique : par le théorème de Lagrange, pour les irrationnels du second degré, et pour eux seuls ; si elle n'est qu'ultimement périodique, la répétition ne commence qu'à partir d'un certain étage. Pour π , chaque étage obéit à une règle différente et aucune substitution ne l'engendre.

3.7. Remarques

Primitivité. Un triplet est primitif lorsque a est impair et $\gcd(a, b) = 1$. La seconde condition est automatique ici : $a^2 - nb^2 = \pm 1$ force $\gcd(a, b) = 1$. Reste la parité de a , et elle alterne dans les trois exemples ci-dessus : un terme sur deux est primitif, l'autre est le double d'un triplet primitif. Ainsi pour $n = 3$, (2, 1) et (26, 15) donnent des triplets doubles, (7, 4) et (97, 56) des primitifs. C'est le pas (12) qui fait basculer la parité à chaque application : il échange les parités de a et de b exactement quand a_1 est pair, ce qui est le cas pour $n = 3, 5$ et 7. La famille presque isocèle ($n = 2$) fait exception : $a^2 - 2b^2 = \pm 1$ force a impair, le pas $(a, b) \mapsto (a + 2b, a + b)$ préserve cette parité, et tous ses triplets sont primitifs.

Ce que ces familles ne sont pas. Les trois familles de la Section 2 minimisent chacune un écart entre deux côtés, quantité que le triangle porte directement. Celles-ci fixent un *rapport* entre deux écarts, ce qui est une condition d'une autre nature : elle ne dit rien de la taille du triangle, seulement de sa forme. Chaque famille n est une classe de triangles semblables approchée de plus en plus finement, celle dont les défauts sont dans le rapport $n/2$.

Au-delà des racines carrées. Rien n'oblige à partir de $(z - y)/(z - x)$. Toute relation linéaire $px + qy + rz = 0$ à coefficients entiers devient, en divisant par b^2 , une équation du second degré en $t = a/b$: les côtés sont des formes quadratiques en (a, b) , donc le rapport des graines visé est toujours racine positive d'un polynôme du second degré, rationnel ou irrationnel quadratique (s'il en existe une). Réciproquement, tout irrationnel quadratique positif s'obtient ainsi. Si $At^2 + Bt + C = 0$ est son polynôme minimal, la relation qui le produit est

$$p = B - C, \quad q = B - 2A, \quad r = C - B + 2A.$$

On retrouve $x = y$ pour $\sqrt{2}$, et $2z = 3y$ donne le nombre d'or, avec pour graines deux nombres de Fibonacci consécutifs. La frontière est nette : ces familles couvrent exactement les irrationnels du second degré, ceux dont la fraction continue est ultimement périodique, et aucun autre. Ni π , ni e , ni $\sqrt[3]{2}$ n'est atteint par une relation linéaire entre les côtés.

3.8. Engendrer les irrationnels

Le pas de la troisième famille s'écrit $(a, b) \mapsto (a + 2b, a + b)$, et le 2 qui y figure vient de $z - x = 2b^2$. Remplacé par un entier n quelconque, il envoie le rapport a/b sur $\sqrt{n}$. Si maintenant on échange les deux sorties de la même récurrence, le rapport b/a tend vers un nombre métallique :

$$(a, b) \mapsto (a + nb, a + b) : \frac{a}{b} \rightarrow \sqrt{n}, \quad (a, b) \mapsto (a + b, a + nb) : \frac{b}{a} \rightarrow \frac{(n-1) + \sqrt{(n-1)^2 + 4}}{2},$$

ce dernier ayant pour fraction continue $[n-1; n-1, n-1, \dots]$.

n	$a/b \rightarrow \sqrt{n}$	$b/a \rightarrow$ nombre métallique
2	1,414213562... = $\sqrt{2}$	1,618033989... = nombre d'or
3	1,732050808... = $\sqrt{3}$	2,414213562... = $1 + \sqrt{2}$
4	2	3,302775638... = $(3 + \sqrt{13})/2$
5	2,236067978... = $\sqrt{5}$	4,236067978... = $2 + \sqrt{5}$
6	2,449489743... = $\sqrt{6}$	5,192582404... = $(5 + \sqrt{29})/2$
7	2,645751311... = $\sqrt{7}$	6,162277660... = $3 + \sqrt{10}$

Les deux colonnes se répondent : la première est celle des racines carrées, la seconde celle des nombres métalliques, et l'on passe de l'une à l'autre en inversant l'ordre des deux sorties. Pour $n = 3$, on retrouve le nombre d'argent $1 + \sqrt{2}$: c'est le facteur par lequel croissent les graines de la famille presque isocèle (les triangles, de degré 2, croissent de $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$), et c'est aussi la valeur propre de la substitution σ . Rien de tout cela n'est propre aux triangles.

Des triplets primitifs bien alignés

La figure 1 reprend le plan des graines de la figure 1, pour $a, b \leq 50$. Les points noirs sont les graines des triplets primitifs (a impair et $\gcd(a, b) = 1$, Proposition 1.6), les points blancs les autres. Hormis $b = 1$, toutes les droites tracées ne portent que des triplets primitifs : ce sont les droites orange, bleues, cyan et rouges ; les rouges permettent de mettre en évidence les nombres premiers.

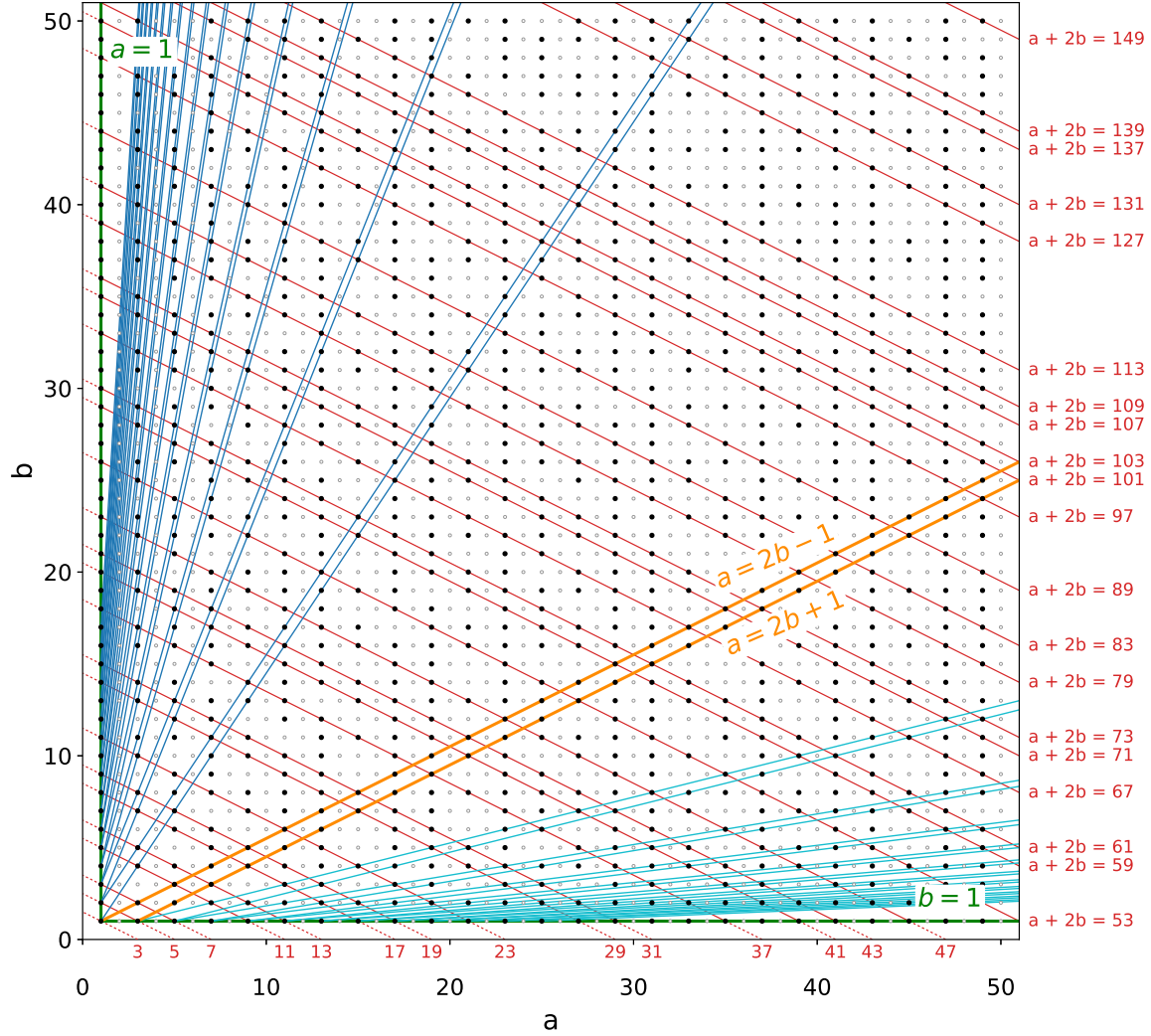


FIGURE 1. Quelques exemples de triplets primitifs bien alignés.

4.1. Le choix des droites

Une droite d'équation $pa - qb = \pm 1$, avec p impair et q pair, ne porte que des triplets primitifs : un diviseur commun de a et b divise ± 1 , et $pa = qb \pm 1$ est impair, donc a aussi. La figure en montre trois sortes :

- en orange, $a = 2b - 1$ et $a = 2b + 1$;
- en bleu, les droites $ka - 2b = \pm 1$, pour k impair à partir de 3 ;
- en cyan, les droites $a = 2mb \pm 1$, pour m à partir de 2.

En vert figurent aussi les familles $a = 1$ et $b = 1$ du chapitre 2 ; la seconde porte un triplet non primitif sur deux, ceux où a est pair.

Il en existe dans d'autres directions, comme $3a - 4b = \pm 1$, qui ne sont pas tracées.

Parmi les droites de la figure entièrement faites de triplets primitifs, les orange, les rouges et $a = 1$ sont les seules sur lesquelles les triplets sont consécutifs : on passe de l'un au suivant par le plus petit pas possible, $(2, 1)$ pour les orange, $(2, -1)$ pour les rouges, $(0, 1)$ pour $a = 1$. Sur les bleues et les cyan, le pas est plus grand, $(2, k)$ ou $(2m, 1)$. Les rouges sont par ailleurs les seules à être des segments : les autres se prolongent indéfiniment, alors qu'une droite $a + 2b = d$ s'arrête aux deux axes.

4.2. Les segments rouges et les nombres premiers

Les segments rouges sont les droites $a + 2b = p$, p premier, prises entre les deux axes : chacune va de $(p, 0)$ à $(0, p/2)$, et son milieu, $(p/2, p/4)$, est sur la droite $a = 2b$. Dans les triangles, la droite $a + 2b = d$ réunit les triplets dont le quatrième terme de la suite des graines vaut d , et dont la cathète $x = ad$ est donc un multiple de d .

PROPOSITION 4.1. *Soit $d \geq 3$ un entier impair. Les graines entières de la droite $a + 2b = d$, qui vont de $(d - 2, 1)$ à $(1, (d - 1)/2)$, donnent toutes des triplets primitifs si et seulement si d est premier.*

DÉMONSTRATION. Sur cette droite, $a = d - 2b$ est impair. Un diviseur commun de a et b divise $a + 2b = d$; réciproquement, un diviseur commun de a et d divise $d - a = 2b$ et il est impair, donc il divise b . Ainsi $\gcd(a, b) = \gcd(a, d)$. Si d est premier, comme $1 \leq a < d$, ce gcd vaut 1 et tous les triplets sont primitifs (Proposition 1.6). Si d est composé, soit s son plus petit facteur premier : s est impair et $d = st$ avec $t \geq s \geq 3$. Le point $(s, s(t - 1)/2)$ est sur la droite, et ses deux graines sont multiples de s : son triplet n'est pas primitif. $\square$

Sur $a + 2b = 11$, par exemple, les graines $(9, 1)$, $(7, 2)$, $(5, 3)$, $(3, 4)$, $(1, 5)$ donnent $(99, 20, 101)$, $(77, 36, 85)$, $(55, 48, 73)$, $(33, 56, 65)$, $(11, 60, 61)$, tous primitifs ; sur $a + 2b = 15$, la graine $(3, 6)$ donne $(45, 108, 117) = 9 \cdot (5, 12, 13)$. Sur la figure, les nombres premiers se lisent donc comme les droites de pente $-1/2$ entièrement noires.

Chaque droite rouge $a + 2b = p$ croise exactement l'une des deux droites orange en un triplet, le point entier le plus proche du milieu du segment : la droite $a = 2b + 1$ si $p = 4n + 1$, au point $((p + 1)/2, (p - 1)/4)$, et la droite $a = 2b - 1$ si $p = 4n + 3$, au point $((p - 1)/2, (p + 1)/4)$. La cathète de ce triplet, $x = ap = p(p \pm 1)/2$, est un nombre triangulaire : pour $p = 13$, la graine $(7, 3)$ donne $(91, 60, 109)$, et $91 = 1 + 2 + \dots + 13$; pour $p = 11$, la graine $(5, 3)$ donne $(55, 48, 73)$, et $55 = 1 + 2 + \dots + 10$. Ces propriétés ne dépendent que du reste de p modulo 4, et valent pour toute droite $a + 2b = d$ avec d impair.

La lecture physique de ces droites, qui vont d'un corps immobile à un photon, est l'objet du chapitre 6.

4.3. Du verger d'Euclide au plan des graines

La figure des nombres premiers de la section 4.2 (les droites $a+2b = p$ du plan des graines) descend d'un dessin classique, le *verger d'Euclide*. La même propriété se lit dans trois plans successifs.

4.3.1. Le verger d'Euclide. On place un point en chaque couple d'entiers (x, y) , avec $x, y \geq 1$, et on le noircit quand $\gcd(x, y) = 1$. Le nom vient d'une image : un observateur placé à l'origine, au milieu d'un verger planté en quinconce, ne voit que les arbres noirs ; les autres sont cachés derrière un arbre plus proche, sur la même ligne de visée. Le dessin habituel du verger ne montre que les points, et, parfois, les lignes de visée issues de l'origine.

Les anti-diagonales $x + y = n$ ne sont en général pas dessinées. Elles portent pourtant une propriété simple : un diviseur commun de x et y divise $x + y = n$, et un diviseur commun de x et n divise $y = n - x$, donc

$$\gcd(x, y) = \gcd(x, n).$$

Tous les points de l'anti-diagonale $x + y = n$ sont donc noirs si et seulement si n n'a de facteur commun avec aucun entier compris entre 1 et $n - 1$, c'est-à-dire si et seulement si n est premier. La figure 2 trace ces anti-diagonales pour les nombres premiers.

4.3.2. Le secteur d'Euclide. La formule d'Euclide, $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, ne garde du verger que les points (m, n) avec $m > n$; le triplet est primitif quand, en plus, m et n sont premiers entre eux et de parités différentes. La figure 3 ne montre que ce secteur, sous la diagonale $m = n$. Comme m et n sont de parités différentes, $m + n$ est impair, et la propriété précédente devient : les triplets primitifs de la droite $m + n = N$, avec N impair, sont tous les points du secteur exactement quand N est premier.

4.3.3. Le plan des graines. Les graines sont $a = m - n$ et $b = n$. Ce changement de coordonnées redresse le secteur d'Euclide en un quadrant : la diagonale $m = n$ devient l'axe $a = 0$, et l'axe $n = 0$ reste l'axe $b = 0$. La droite $m + n = p$ devient la droite $a + 2b = p$, dont la pente passe de -1 à $-1/2$ (figure 4). La condition de primitivité devient « a impair et $\gcd(a, b) = 1$ ».

4.3.4. Ce qui est commun, et ce qui change. Les trois figures montrent la même propriété, transportée d'un plan à l'autre par des changements de coordonnées linéaires : une droite rouge est entièrement noire si et seulement si son nombre est premier, et ses points sont consécutifs (au pas $(1, -1)$ dans le verger, $(2, -1)$ dans le plan des graines). Le fait arithmétique est élémentaire et connu sous forme d'énoncé ; nous n'avons pas trouvé de dessin qui trace ces droites.

Ce qui change d'une figure à l'autre, c'est ce que portent les points et les droites :

- dans le verger, ce sont de simples couples d'entiers ;
- dans le secteur d'Euclide et le plan des graines, chaque point noir est un triangle rectangle primitif, et la droite $a + 2b = p$ réunit les triangles dont le quatrième terme de la suite des graines, $d = a + 2b$, vaut p ;
- dans le plan des graines seulement, ces droites côtoient les familles du chapitre 2 (celles de Pythagore et de Platon, $a = 1$ et $b = 1$, et la famille presque isocèle), et chacune a une lecture relativiste : elle réunit les particules de même $E + p$, du corps immobile au photon.

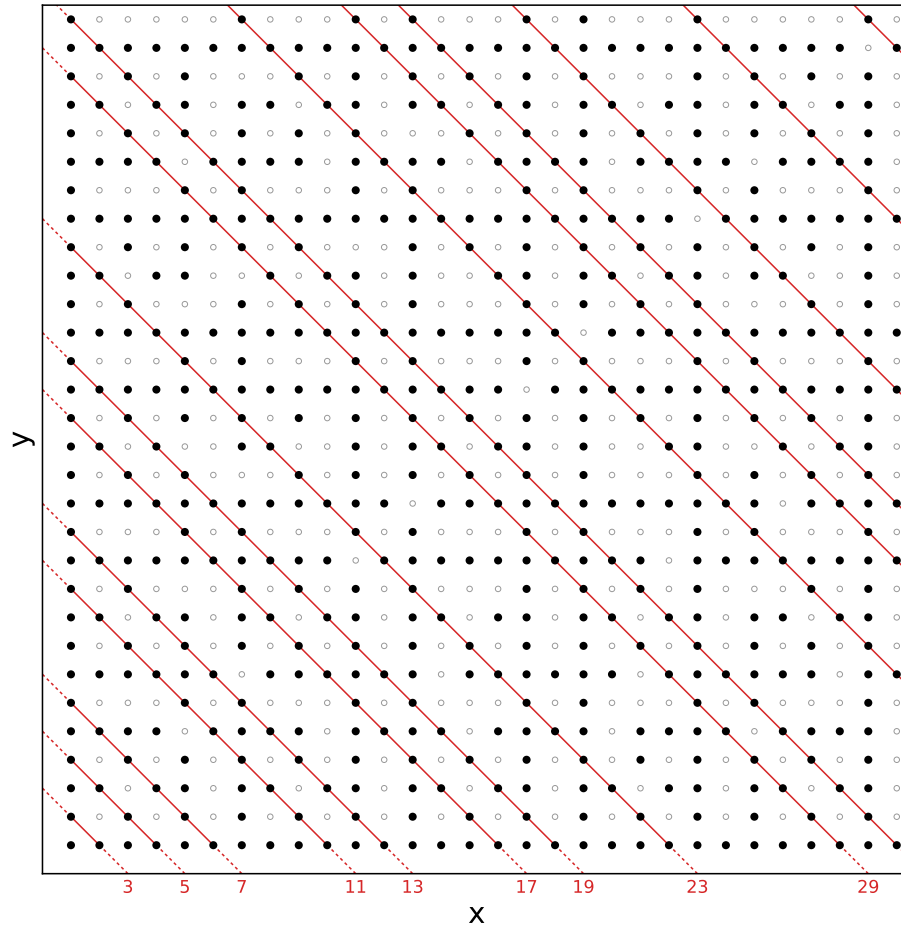


FIGURE 2. Le verger d'Euclide ($x, y \leq 30$) : en noir les couples premiers entre eux. En rouge, les anti-diagonales $x + y = p$, p premier : ce sont les seules entièrement noires.

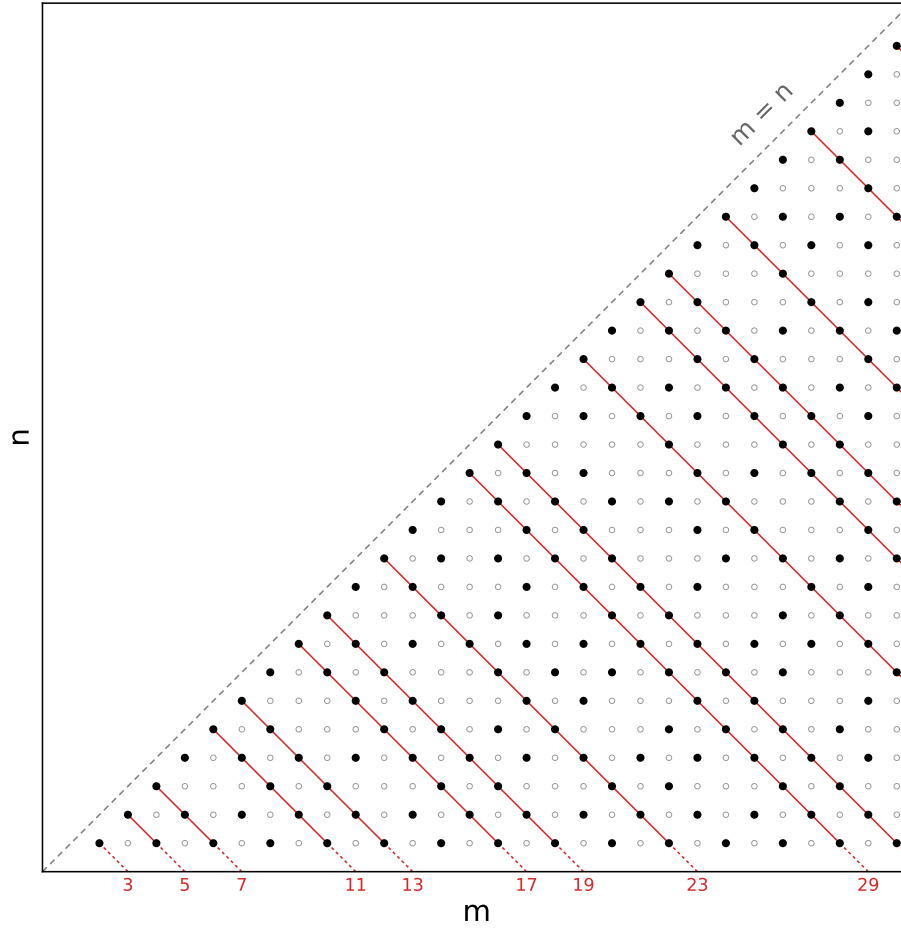


FIGURE 3. Le secteur d'Euclide ($m > n$) : en noir les couples qui donnent un triplet primitif. En rouge, les droites $m + n = p$, p premier, entre l'axe $n = 0$ et la diagonale $m = n$.

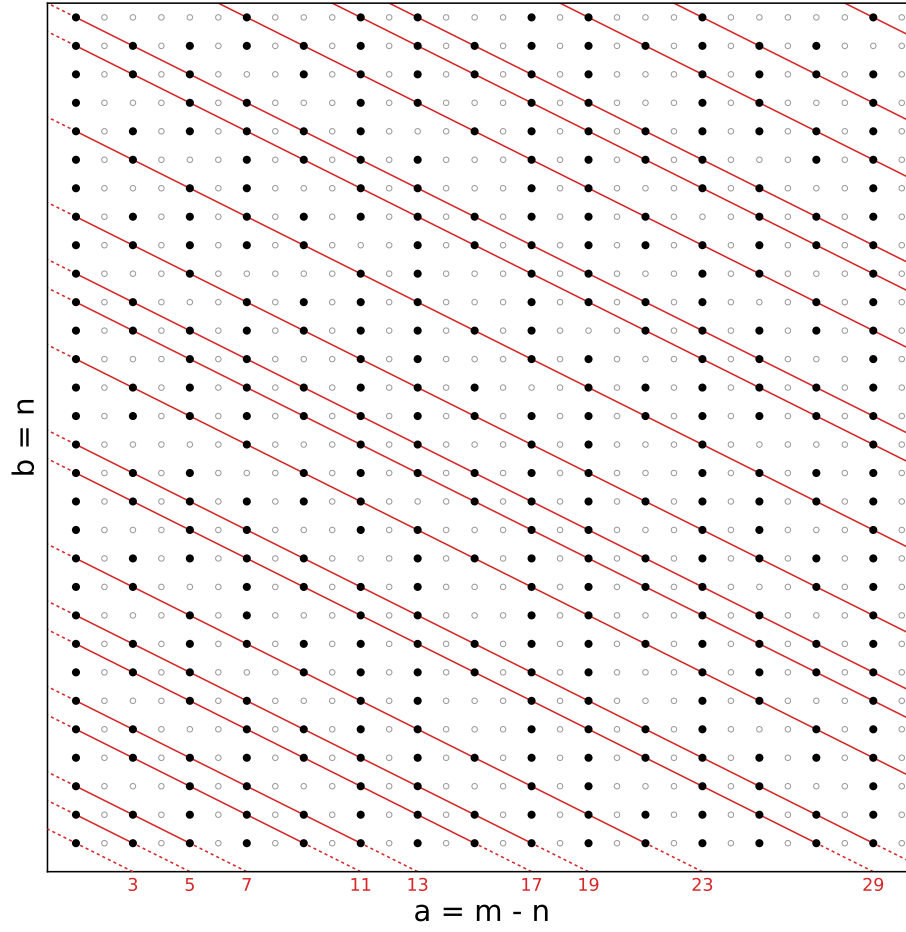


FIGURE 4. Le même secteur dans le plan des graines $(a, b) = (m - n, n)$: les droites rouges sont les droites $a + 2b = p$ de la section 4.2.

4.4. Le réseau des triplets primitifs voisins

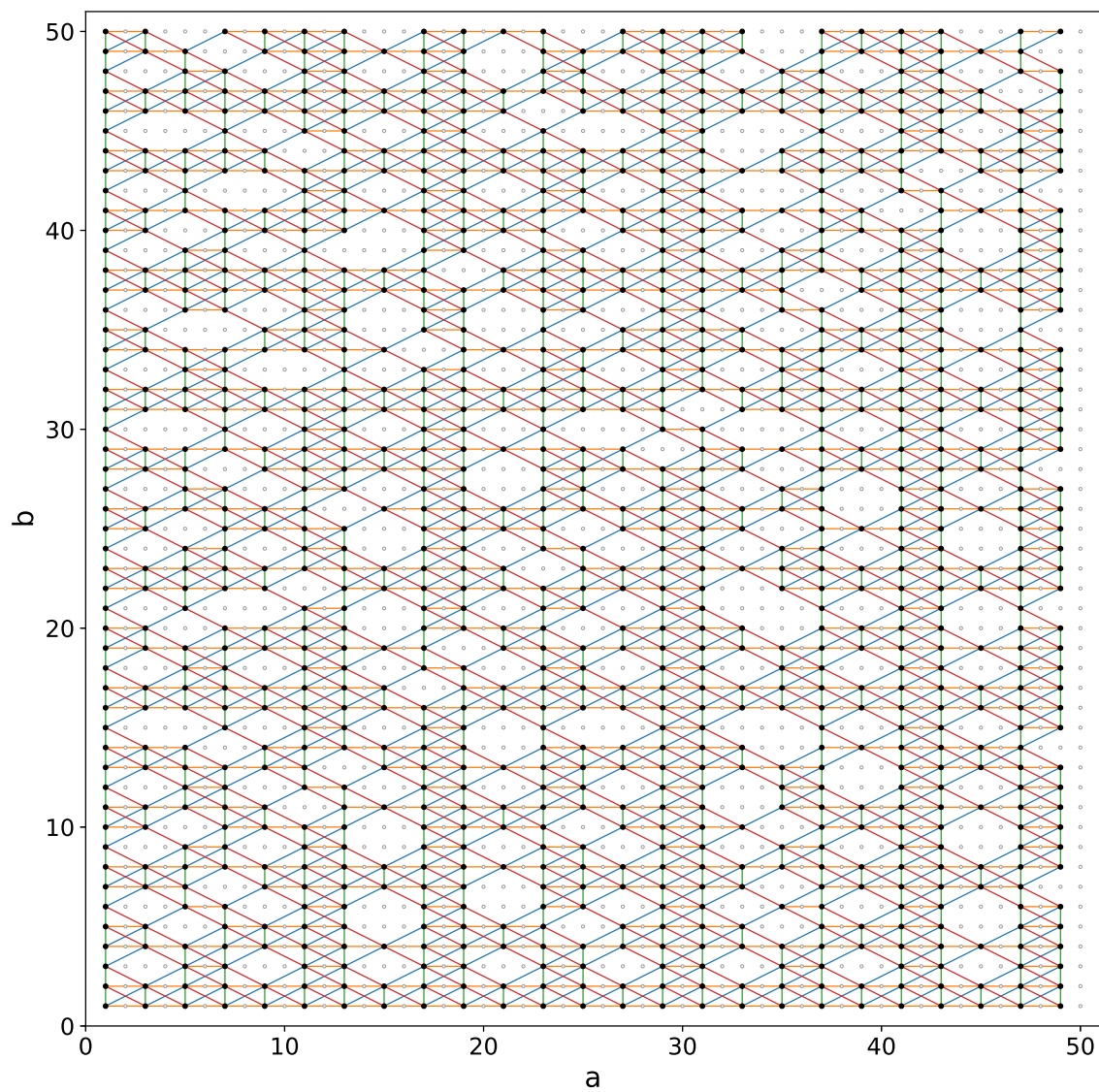


FIGURE 5. Le réseau des triplets primitifs voisins.

Une particule est un triangle

5.1. De la relation d'Einstein au théorème de Pythagore

Trois mots pour commencer, pour ceux qui ne les ont pas rencontrés.

La masse: mesure l'inertie de la particule, sa résistance à être mise en mouvement. C'est la quantité qui ne change pas, quel que soit l'observateur qui regarde.

L'impulsion: est la « quantité de mouvement » : en physique ordinaire, masse fois vitesse. Elle vaut zéro pour un corps immobile.

L'énergie: est l'énergie totale. Un corps immobile en possède déjà, à cause de sa seule masse ; s'il bouge, il en a davantage.

Einstein a relié ces trois grandeurs. Dans les unités ordinaires, sa *relation d'énergie-impulsion* s'écrit

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2,$$

où la lettre c désigne la vitesse de la lumière. Toute particule de l'univers la vérifie. Pour une particule au repos, l'impulsion est nulle : $p = 0$, et il reste $E^2 = m^2c^4$, c'est-à-dire

$$E = mc^2.$$

La formule la plus célèbre de la physique n'est donc que le cas particulier de la relation d'Einstein pour un corps immobile.

Une convention, et une lettre à éviter. On mesure maintenant les vitesses en fraction de la vitesse de la lumière. Une vitesse de 0,8 veut donc dire « huit dixièmes de la vitesse de la lumière », et la vitesse de la lumière elle-même vaut 1. Les facteurs c disparaissent, et la relation d'Einstein devient

$$E^2 = m^2 + p^2.$$

C'est le théorème de Pythagore. Au passage, $E = mc^2$ devient simplement $E = m$ pour un corps au repos, et masse, impulsion et énergie se mesurent dans la même unité. C'est la seule fois où la lettre c désigne la vitesse de la lumière : dans toute la suite elle est prise, car dans la méthode des graines, $c = a + b$.

Une particule est un triangle rectangle. La relation d'Einstein dit que la masse et l'impulsion sont les deux cathètes d'un triangle rectangle dont l'énergie est l'hypoténuse. On dessine toujours la masse à l'horizontale et l'impulsion à la verticale (figure 1). Quand les trois côtés sont entiers, ce triangle est un triplet pythagoricien, d'où la règle du jeu :

Dans un triplet pythagoricien (x, y, z) , la cathète x est une masse, la cathète y une impulsion, et l'hypoténuse z une énergie.

Prenons $(3, 4, 5)$: $m = 3$, $p = 4$, $E = 5$, et l'on a bien $m^2 + p^2 = 9 + 16 = 25 = E^2$.

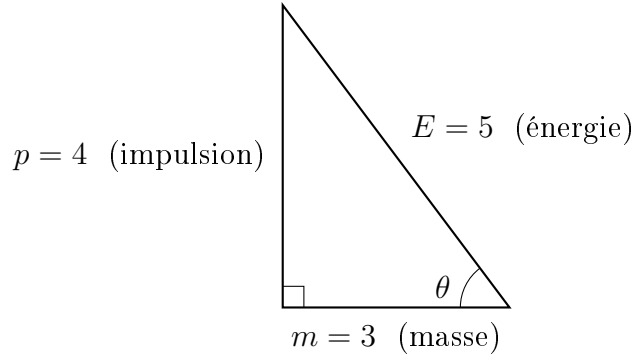


FIGURE 1. Le triplet (3, 4, 5) lu comme une particule : la masse est horizontale, l'impulsion verticale, l'énergie est l'hypoténuse. L'angle θ , entre la masse et l'énergie, donne la vitesse (section 5.2).

5.2. La vitesse se lit sur le triangle

Il manque encore la vitesse. Elle est donnée par une règle simple :

$$\boxed{v = \frac{p}{E}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad v = \frac{\text{cathète } y}{\text{hypoténuse}} = \frac{y}{z}.$$

Autrement dit, en relativité, *l'impulsion est l'énergie multipliée par la vitesse* : $p = Ev$.

Les deux cas extrêmes s'y lisent.

- Un corps **immobile** n'a pas d'impulsion : $p = 0$, donc $v = 0$. Cohérent.
- Un rayon de **lumière** n'a pas de masse : $m = 0$, donc $E^2 - p^2 = 0$, donc $E = p$, donc $v = 1$ — la vitesse de la lumière. Cohérent aussi.

Et entre les deux, comme m n'est jamais nul pour un corps massif, on a toujours $p < E$, donc $v < 1$: *aucune particule massive n'atteint la vitesse de la lumière*. Sur le triangle, cela se voit d'un coup d'œil : une cathète est toujours plus courte que l'hypoténuse.

La vitesse est un angle. Sur le triangle, y/z est le côté opposé à l'angle θ (entre la masse m et l'énergie E) divisé par l'hypoténuse : c'est le *sinus* de cet angle.

$$v = \sin \theta.$$

L'angle θ vaut 0 pour un corps au repos et 90° pour la lumière ; un corps massif reste toujours en dessous de 90° . Pour (3, 4, 5), $v = \sin \theta = 4/5 = 0,8$ et $\theta \approx 53,1^\circ$: cette particule file à 80 % de la vitesse de la lumière. On verra que les triangles effilés sont les lents.

La tangente de θ , qui est p/m , n'est pas la vitesse : c'est $v/\sqrt{1-v^2}$, que les physiciens appellent parfois la *célérité*. Elle ne se confond avec la vitesse que pour les petits angles, c'est-à-dire pour les triangles effilés de la section 5.7.

L'angle θ est une commodité de dessin, pas une grandeur qui se compose bien : quand on change d'observateur, les angles θ ne s'additionnent pas. La grandeur qui s'additionne est la *rapidité*, un angle hyperbolique, qui s'écrira simplement avec les graines (section 5.5).

5.3. Les graines et leurs deux défauts

Les triplets sont ceux de la formule (1), $x = ad$, $y = 2bc$, $z = b^2 + c^2$, avec $c = a + b$ et $d = a + 2b$. Pour un triplet primitif, x est la cathète impaire et y la cathète paire. Quand les graines donnent un triplet non primitif, comme (8, 6, 10) pour $(a, b) = (2, 1)$, les deux cathètes sont paires ; c'est toujours $x = ad$ qui joue le rôle de la masse.

Les deux graines mesurent les deux *défauts d'hypoténuse* :

$$z - y = a^2, \quad z - x = 2b^2.$$

Le défaut, c'est ce dont l'hypoténuse dépasse une cathète (figure 2). Ces deux défauts ont un sens physique, et c'est tout l'objet de ce chapitre.

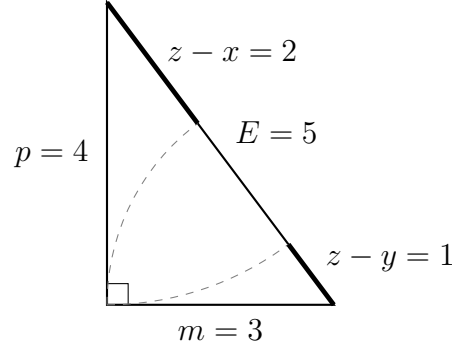


FIGURE 2. Les deux défauts de $(3, 4, 5)$, de graines $a = b = 1$. Les deux arcs reportent les cathètes sur l'hypoténuse ; ce qui dépasse, ce sont les défauts $z - y = a^2 = 1$ et $z - x = 2b^2 = 2$. Le trait épais du haut, $z - x = 2$, est l'énergie cinétique (section 5.4).

Le défaut $z - y = a^2$ mesure l'écart à la lumière. En effet $z - y = E - p$, et on a vu que $E = p$ caractérise exactement la lumière. Donc a^2 dit de combien la particule rate d'être un rayon lumineux. Poussons jusqu'au bout : si $a = 0$, les formules donnent $c = b$, $d = 2b$, puis

$$a = 0, b = 1 \longrightarrow (x, y, z) = (0, 2, 2).$$

Un triangle sans masse, et $v = 2/2 = 1$. La graine $a = 0$ est un photon.

Le défaut $z - x = 2b^2$ mesure l'écart au repos. En effet $z - x = E - m$, et $E = m$ caractérise exactement un corps immobile. Donc $2b^2$ dit de combien la particule rate d'être au repos. De même,

$$a = 1, b = 0 \longrightarrow (x, y, z) = (1, 0, 1),$$

un triangle sans impulsion, et $v = 0/1 = 0$. La graine $b = 0$ est une particule au repos.

graine	défaut	ce qu'elle mesure
a	$z - y = a^2 = E - p$	l'écart à la lumière ; $a = 0$: un photon
b	$z - x = 2b^2 = E - m$	l'écart au repos ; $b = 0$: un corps immobile

Les deux graines encadrent donc le mouvement par ses deux extrêmes. Une particule réelle est un compromis entre les deux ; les deux sections suivantes disent ce que chaque graine en mesure.

5.4. L'énergie cinétique, c'est $2b^2$

L'énergie cinétique est l'énergie *du mouvement* d'un corps, par opposition à celle qu'il possède déjà à l'arrêt. C'est donc, exactement, ce qu'il faut retrancher :

$$\text{énergie cinétique} = E - m.$$

Or $E - m$ est le second défaut. D'où l'énoncé central de ce chapitre :

L'énergie cinétique d'un triplet pythagoricien est $z - x$, c'est-à-dire $2b^2$.

Elle ne dépend que de la graine b . Vérification sur $(3, 4, 5)$, de graines $(1, 1)$:

$$E - m = 5 - 3 = 2, \quad 2b^2 = 2 \times 1^2 = 2.$$

La formule de la relativité écrit d'ordinaire cette énergie avec une racine carrée, $E - m = m(1/\sqrt{1-v^2} - 1)$; dans le paramétrage des graines, elle vaut deux fois le carré de la graine b .

5.5. La vitesse en graines : le facteur de Doppler

Pour écrire la vitesse avec les graines, le bon rapport n'est pas a/b mais d/a . On connaît déjà $z - y = a^2$; de même, $z + y = b^2 + c^2 + 2bc = (b + c)^2 = d^2$. En additionnant et en soustrayant, $y = \frac{1}{2}(d^2 - a^2)$ et $z = \frac{1}{2}(d^2 + a^2)$, d'où

$$v = \frac{d^2 - a^2}{d^2 + a^2}.$$

Pour $(3, 4, 5)$, de graines $a = b = 1$, on a $d = 3$ et $v = (9 - 1)/(9 + 1) = 0,8$. C'est la forme même de la formule d'Euclide, cette fois écrite avec a et d , le premier et le dernier terme de la suite. Les deux extrêmes s'y lisent aussitôt : $a = 0$ donne $v = 1$, la lumière ; $b = 0$ donne $d = a$ et $v = 0$, le repos.

Le rapport d/a est lui-même une grandeur physique : c'est le *facteur de Doppler* de la particule. Un observateur qui file à la vitesse v vers une étoile voit sa lumière décalée vers le bleu, et les fréquences qu'il reçoit sont multipliées par

$$\frac{d}{a} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}.$$

Pour $(3, 4, 5)$, ce facteur vaut 3. Il a une propriété que la vitesse n'a pas : quand on change d'observateur, les facteurs de Doppler se *multiplient*, alors que les vitesses ne s'additionnent pas simplement.

Les rapports a/b et d/a disent la même chose, puisque $d/a = 1 + 2b/a$; mais a/b sert à ranger les familles de triangles, comme on va le voir, et c'est d/a qui parle le langage de la relativité.

Les coordonnées de cône de lumière. Les physiciens utilisent volontiers les deux combinaisons $E + p$ et $E - p$. Avec les graines, ce sont deux carrés :

$$E + p = d^2, \quad E - p = a^2.$$

La relation d'Einstein s'écrit $m^2 = E^2 - p^2 = (E + p)(E - p) = a^2 d^2$, d'où $m = ad$: c'est la cathète x . Le facteur de Doppler vaut $d/a = \sqrt{(E + p)/(E - p)}$, et son logarithme $\ln(d/a)$ est la rapidité. Quand on change d'observateur, les facteurs de Doppler se multiplient, donc les rapidités s'additionnent : c'est la bonne mesure « angulaire » de la vitesse, et elle s'écrit avec deux termes de la suite des graines.

5.6. À b fixé : la même énergie cinétique

Dans la méthode des graines, on obtient des familles de triplets en *fixant une graine* et en laissant courir l'autre. Puisque chaque graine mesure une énergie — a^2 l'écart à la lumière, $2b^2$ l'énergie cinétique —, fixer une graine revient à fixer une énergie. Les familles de la méthode sont donc des familles physiques.

La famille $b = 1$. Ce sont les triplets vérifiant $z = x + 2$. Tous ont l'énergie cinétique $2b^2 = 2$.

graines	triplet (m, p, E)	masse m	vitesse v	énergie cinétique
(1, 1)	(3, 4, 5)	3	0,800	2
(2, 1)	(8, 6, 10)	8	0,600	2
(3, 1)	(15, 8, 17)	15	0,471	2
(5, 1)	(35, 12, 37)	35	0,324	2
(10, 1)	(120, 22, 122)	120	0,180	2

On retrouve le bon sens : à *énergie de mouvement fixée, plus le corps est lourd, plus il va lentement*. Donnez le même coup de pied à un ballon et à une enclume.

La famille $b = 2$. Même chose avec l'énergie cinétique $2b^2 = 8$: (5, 12, 13), (12, 16, 20), (21, 20, 29), (45, 28, 53), (140, 48, 148), de masses 5, 12, 21, 45, 140 et de vitesses 0,923, 0,800, 0,690, 0,528, 0,324. Même décroissance, quatre fois plus d'énergie.

5.7. Les triangles effilés, et le retour de $\frac{1}{2}mv^2$

Poussons la famille $b = 1$ plus loin. Quand a grandit, les triangles s'aplatissent et les particules ralentissent. Or au collège, on apprend que l'énergie cinétique vaut $\frac{1}{2}mv^2$. Si $2b^2$ est la bonne formule, les deux doivent se rejoindre quelque part : elles se rejoignent sur ces triangles effilés.

Ce qu'on appelle un triangle effilé. C'est un triangle rectangle très aplati, dont une cathète est bien plus courte que l'autre. Ici, c'est la cathète p qui doit être courte devant la cathète m . Pourquoi ? Parce que la vitesse est $v = p/E$; quand p est petit devant m , l'hypoténuse E est à peine plus longue que m , et donc

$$v \approx \frac{p}{m} = \frac{\text{petite cathète}}{\text{grande cathète}}.$$

Le rapport des deux cathètes est la vitesse. C'est la tangente de l'angle θ , et pour un angle aussi petit, sinus et tangente se confondent. Un triangle presque plat est une particule lente ; un triangle bien ouvert est une particule rapide.

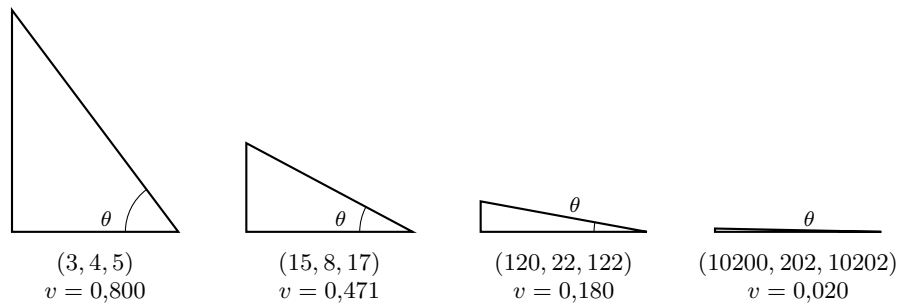


FIGURE 3. Quatre particules de la famille $b = 1$, dessinées à la même masse. La cathète horizontale est la masse m , la verticale l'impulsion p . L'angle marqué θ a pour sinus la vitesse : plus le triangle est effilé, plus l'angle est petit et plus la particule est lente. Les quatre ont la même énergie cinétique, 2.

Un calcul complet, pas à pas. Reprenons les graines $a = 10$, $b = 1$ du tableau précédent.

- (1) Les compagnes : $c = a + b = 11$ et $d = a + 2b = 12$.
- (2) Le triplet : $x = ad = 120$, $y = 2bc = 22$, $z = b^2 + c^2 = 1 + 121 = 122$.
- (3) Vérification : $120^2 + 22^2 = 14400 + 484 = 14884$, et $122^2 = 14884$.
- (4) La lecture physique : $m = 120$, $p = 22$, $E = 122$.
- (5) La vitesse : $v = \frac{p}{E} = \frac{22}{122} = 0,18033$, soit 18 % de la vitesse de la lumière.
- (6) L'énergie cinétique exacte : $E - m = 122 - 120 = 2$, et l'on retrouve bien $2b^2 = 2$.
- (7) La formule du collègue : $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 120 \times 0,18033^2 = 1,9511$.

1,9511 contre 2 : la formule du collègue se trompe de 2,4 %. Elle n'est pas fausse, elle est *approchée*.

Le tableau. Reprenons ce calcul sur des triangles de plus en plus effilés, toujours avec $b = 1$, donc toujours la même énergie cinétique exacte, 2.

graines	triplet (m, p, E)	$v = p/E$	$E - m = 2b^2$	$\frac{1}{2}mv^2$	écart
(1, 1)	(3, 4, 5)	0,8000	2	0,960	−52 %
(3, 1)	(15, 8, 17)	0,4706	2	1,661	−17 %
(10, 1)	(120, 22, 122)	0,1803	2	1,9511	−2,4 %
(30, 1)	(960, 62, 962)	0,0645	2	1,9938	−0,31 %
(100, 1)	(10200, 202, 10202)	0,0198	2	1,99941	−0,03 %
(1000, 1)	(1002000, 2002, 1002002)	0,0020	2	1,99999	−0,0003 %

La colonne $E - m = 2b^2$ est exacte sur toute la hauteur du tableau, du triangle bien ouvert jusqu'au plus effilé. La colonne $\frac{1}{2}mv^2$, elle, n'est bonne qu'en bas. Elle décroche dès que la vitesse compte.

Pourquoi elle décroche. La formule exacte, développée en puissances de la vitesse, s'écrit

$$E - m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^4 + \frac{5}{16}mv^6 + \dots$$

La formule du collègue n'en est que le premier terme. Quand v vaut 0,02, le terme suivant est environ 3 000 fois plus petit et l'on ne voit rien. Quand v vaut 0,8, il est du même ordre et l'approximation ne vaut plus rien. Reprenons la ligne (10, 1), où $v = 0,18033$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = 1,9511, \quad \frac{3}{8}mv^4 = 0,0476, \quad \text{somme} = 1,9987.$$

Deux termes suffisent déjà à s'approcher de 2 à un peu plus d'un millièmè près. La méthode des graines, elle, donne 2 du premier coup et sans développement : c'est $2b^2$.

5.8. À a fixé : vers la lumière

L'autre graine fixe l'autre écart. La famille $a = 1$ est celle des triplets vérifiant $z = y + 1$: tous ratent la lumière de la même quantité, $a^2 = 1$.

graines	triplet (m, p, E)	masse m	vitesse v	$E - p$
(1, 1)	(3, 4, 5)	3	0,800	1
(1, 2)	(5, 12, 13)	5	0,923	1
(1, 3)	(7, 24, 25)	7	0,960	1
(1, 5)	(11, 60, 61)	11	0,984	1

Cette fois les vitesses *montent* vers 1. C'est cohérent : l'écart à la lumière reste 1 pendant que l'énergie grandit, donc l'écart *relatif* s'amenuise. Ces particules s'approchent de la lumière sans jamais l'atteindre, puisque $a = 1$ n'est jamais 0.

5.9. Toutes les familles vont quelque part

Les deux sortes de familles se résument ainsi.

famille	ce qui est fixé	ce qu'on voit
b fixé ($z = x + 2b^2$)	l'énergie cinétique	des corps de plus en plus lourds et de plus en plus lents
a fixé ($z = y + a^2$)	l'écart à la lumière	des corps de plus en plus rapides, tendant vers la lumière

Ce qu'on a vu pour $a = 1$ et $b = 1$ vaut pour toutes les familles.

À a fixé, quand b grandit, l'écart à la lumière $E - p = a^2$ reste le même tandis que l'énergie $E = b^2 + (a + b)^2$ grandit comme $2b^2$: l'écart *relatif* s'efface et la vitesse monte vers 1. Avec $a = 3$, par exemple, on obtient (15, 8, 17), (21, 20, 29), (27, 36, 45), (33, 56, 65), de vitesses 0,47, 0,69, 0,80, 0,86.

À b fixé, quand a grandit, l'énergie cinétique $E - m = 2b^2$ reste la même tandis que l'énergie grandit comme a^2 : la vitesse, qui vaut à peu près $2b/a$, descend vers 0.

La raison est que la forme du triangle ne dépend que du rapport a/b — ou, ce qui revient au même, du facteur de Doppler $d/a = 1 + 2b/a$ — et que la vitesse n'est rien d'autre que cette forme lue par un physicien. La direction vers laquelle va une famille ne dépend donc que de la limite de a/b :

le rapport $a/b \dots$	et donc $d/a \dots$	la forme limite	la lecture physique
tend vers 0 (a fixé)	tend vers l'infini	aplatie sur la cathète y	la lumière
tend vers l'infini (b fixé)	tend vers 1	aplatie sur la cathète x	le repos
tend vers $\sqrt{2}$	tend vers $1 + \sqrt{2}$	le triangle isocèle	la vitesse $\sqrt{2}/2 \approx 0,707$
tend vers un nombre r	tend vers $1 + 2/r$	la forme fixée par r	une vitesse fixée par r

Une nuance, pour ne pas se tromper sur ce qui tend vers quoi. Dans ces familles, ce n'est pas la particule qui devient un photon ou un corps immobile, c'est la *forme* de son triangle. La masse, elle, ne s'annule pas et ne se stabilise pas : elle grandit sans limite. À a fixé, la masse $m = a(a + 2b)$ grandit comme b et l'énergie comme b^2 : la masse devient négligeable, d'où l'allure d'un rayon de lumière. À b fixé, la masse grandit comme a^2 , au même rythme que l'énergie : c'est l'énergie cinétique qui devient négligeable, d'où l'allure d'un corps au repos — une enclume de plus en plus lourde, qui reçoit toujours le même coup de pied. Le vrai photon, $a = 0$, et le vrai corps immobile, $b = 0$, ne sont atteints par aucune famille : ce sont les deux bords du plan des graines.

La troisième ligne du tableau mérite une section à elle seule.

5.10. La troisième famille : les triangles presque isocèles

Un triangle rectangle isocèle aurait $m = p$. Que vaudrait sa vitesse ? On aurait $E^2 = m^2 + p^2 = 2p^2$, donc $E = p\sqrt{2}$, donc

$$v = \frac{p}{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071.$$

Une particule « isocèle » irait donc à 70,71 % de la vitesse de la lumière. Ce n'est pas une vitesse remarquable en physique ; c'est simplement celle pour laquelle l'impulsion égale la masse. L'énergie cinétique, elle, n'y vaut que $\sqrt{2} - 1 \approx 0,414$ fois la masse ; elle n'égale la masse qu'à la vitesse $\sqrt{3}/2 \approx 0,866$.

Aucun triangle rectangle entier n'est isocèle : aucune particule entière ne va donc exactement à $\sqrt{2}/2$. Les triplets presque isocèles de la section 2.4 sont celles qui en approchent le mieux.

graines	triplet (m, p, E)	masse m	vitesse v	d/a	$ m - p $
(1, 1)	(3, 4, 5)	3	0,800000	3,0000	1
(3, 2)	(21, 20, 29)	21	0,689655	2,3333	1
(7, 5)	(119, 120, 169)	119	0,710059	2,4286	1
(17, 12)	(697, 696, 985)	697	0,706599	2,4118	1
(41, 29)	(4059, 4060, 5741)	4059	0,707194	2,4146	1
limite		$\rightarrow \infty$	0,707107	2,4142	1

Les vitesses oscillent autour de $\sqrt{2}/2$ et s'en rapprochent, une fois par en dessus, une fois par en dessous — c'est l'alternance de la cathète la plus longue, $x - y$ valant tour à tour -1 et $+1$. Le facteur de Doppler d/a oscille de même autour de $1 + \sqrt{2} \approx 2,4142$. Les masses, elles, explosent : ce sont des corps de plus en plus lourds qui vont tous, à la limite, à la même vitesse.

Il faut insister sur un point, car la tentation est grande de dire le contraire : cette famille ne décrit *pas* une particule qu'on accélérerait. Une même particule accélérée garde sa masse, par définition de la masse. Ici la masse passe de 3 à 4059. Ce sont donc des particules différentes, qui se trouvent avoir presque la même vitesse.

Les droites $a + 2b = d$ sont des fusées à photons

Les droites $a + 2b = d$ du chapitre 4, celles qui font apparaître les nombres premiers, ont elles aussi une lecture physique. On a vu à la section 5.5 que

$$E + p = d^2, \quad E - p = a^2.$$

Sur la droite $a + 2b = d$, le terme d est le même pour toutes les graines : toutes les particules de la droite ont donc la même valeur de $E + p$, égale à d^2 . C'est une grandeur que les physiciens utilisent : la composante de l'impulsion le long du cône de lumière. Comme E et p , elle s'additionne et se conserve dans les collisions.

6.1. La droite $a + 2b = d$

Soit d un entier impair. Les graines entières de la droite $a + 2b = d$ sont $(d - 2, 1), (d - 4, 2), \dots, (1, (d - 1)/2)$, auxquelles on ajoute les deux bouts :

- $(d, 0)$, qui donne $(d^2, 0, d^2)$: un corps immobile de masse d^2 ;
- $(0, d/2)$, qui donne $(0, d^2/2, d^2/2)$: un photon.

Sur toute la droite, $E + p = d^2$. L'écart à la lumière $E - p = a^2$ décroît de d^2 à 0, la masse $m = ad$ décroît de d^2 à 0, la vitesse

$$v = \frac{d^2 - a^2}{d^2 + a^2}$$

croît de 0 à 1.

6.2. D'un point au suivant : un photon émis vers l'arrière

Un photon qui se déplace dans le sens des p négatifs a une impulsion $-\varepsilon$ et une énergie ε : son $E + p$ est nul. Un corps qui l'émet garde donc son $E + p$, et, par le recul, son impulsion augmente de ε pendant que son énergie diminue de ε .

Passons de la graine a à la graine $a - 2$ sur la droite. Comme $E = (d^2 + a^2)/2$ et $p = (d^2 - a^2)/2$,

$$\Delta E = -\frac{a^2 - (a - 2)^2}{2} = -2(a - 1), \quad \Delta p = +2(a - 1).$$

C'est exactement l'émission vers l'arrière d'un photon d'énergie

$$\varepsilon = 2(a - 1).$$

L'énergie et l'impulsion sont conservées chacune, pas seulement leur somme. L'émission est toujours possible, puisque la masse diminue : un corps de masse M peut émettre un photon et devenir un corps de masse $M' < M$. Ici

$$M - M' = ad - (a - 2)d = 2d :$$

à chaque étape, la masse baisse de la même quantité $2d$. Les masses successives sont $d^2, d(d - 2), \dots, 3d, d$.

La dernière étape est à part. Le corps de graine $(1, (d-1)/2)$, de masse d , émet vers l'arrière un photon d'énergie $1/2$ et il reste un photon d'énergie $d^2/2$ vers l'avant : c'est la désintégration d'une particule de masse d en deux photons.

Pour $d = 11$:

graine (a, b)	masse m	impulsion p	énergie E	photon émis
(11, 0)	121	0	121	20
(9, 1)	99	20	101	16
(7, 2)	77	36	85	12
(5, 3)	55	48	73	8
(3, 4)	33	56	65	4
(1, 5)	11	60	61	0,5
(0, 5,5)	0	60,5	60,5	

Les photons émis emportent $20 + 16 + 12 + 8 + 4 + 0,5 = 60,5$; le photon final porte l'autre moitié, 60,5 ; le total est l'énergie de départ, 121.

6.3. La fusée à photons

Un vaisseau qui se propulse en rejetant de la lumière vers l'arrière est une *fusée à photons*. D'après ce qui précède, il garde son $E + p$. Parti du repos avec la masse m_0 , il vérifie donc $m_0 = E + p$ à tout instant, et comme $E + p = m\sqrt{(1+v)/(1-v)}$,

$$\frac{m}{m_0} = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}.$$

C'est l'équation de la fusée relativiste d'Ackeret (1946), dans le cas d'un rejet à la vitesse de la lumière.

Avec les graines, $m_0 = d^2$ et $m = ad$, donc $m/m_0 = a/d$: c'est l'inverse du facteur de Doppler d/a . La droite $a+2b = d$ est le trajet complet d'une fusée à photons de masse initiale d^2 , du repos jusqu'à la conversion totale en lumière. Ses triplets sont les étapes où la masse, l'impulsion et l'énergie sont toutes trois entières, et on passe de l'une à la suivante par un seul photon d'énergie entière.

6.4. L'accélération

Chaque droite $a + 2b = d$ est une accélération complète : la vitesse

$$v = \frac{d^2 - a^2}{d^2 + a^2}$$

part de 0 au repos ($a = d$) et monte vers 1 quand a décroît. Chaque photon émis vers l'arrière pousse la fusée vers l'avant.

La rapidité. Les vitesses ne s'additionnent pas ; les rapidités, si. La rapidité d'une étape est $\eta = \ln(d/a)$, et $d/a = d^2/(ad)$ est la masse de départ divisée par la masse restante :

$$\eta = \ln \frac{m_0}{m}.$$

C'est l'équation d'Ackeret sous sa forme la plus simple. Le photon qui fait passer de la graine a à la graine $a-2$ apporte

$$\Delta\eta = \ln \frac{a}{a-2},$$

d'autant plus que a est petit. Au dernier arrêt massif, $a = 1$, la rapidité vaut $\ln d$.

Ce que voit le pilote. Dans le repère de la fusée, juste avant l'émission, la fusée a la masse $M = ad$ et devient une fusée de masse $M' = (a - 2)d$. Le photon emporte l'énergie

$$\varepsilon^* = \frac{M^2 - M'^2}{2M} = \frac{2d(a - 1)}{a},$$

soit la fraction $\varepsilon^*/M = 2(a-1)/a^2$ de la masse présente. Cette fraction croît quand a diminue : chaque photon emporte une part plus grande de ce qui reste, et pousse davantage.

Pour $d = 11$:

a	masse	v	gain de v	rapidité	gain de rapidité	part emportée ensuite
11	121	0		0		0,165
9	99	$20/101 \approx 0,198$	0,198	0,201	0,201	0,198
7	77	$36/85 \approx 0,424$	0,226	0,452	0,251	0,245
5	55	$48/73 \approx 0,658$	0,234	0,788	0,336	0,320
3	33	$56/65 \approx 0,862$	0,204	1,299	0,511	0,444
1	11	$60/61 \approx 0,984$	0,122	2,398	1,099	

Les gains de rapidité croissent sans cesse ; les gains de vitesse croissent, puis retombent, parce que v ne peut pas dépasser 1.

La lumière n'est pas atteinte par la fusée. La vitesse 1 demande $a = 0$, donc une masse nulle : au bout de la droite, il ne reste plus de vaisseau, seulement de la lumière. Le dernier arrêt massif est $a = 1$, à la vitesse $(d^2 - 1)/(d^2 + 1)$, qui manque la lumière de $2/(d^2 + 1)$: plus la fusée est massive au départ, plus elle en approche, sans l'atteindre.

Un photon par battement. Deux arrêts voisins de la droite sont séparés par un seul photon, et la masse baisse de $2d$ de l'un à l'autre : compter les arrêts d'un segment, c'est compter les photons émis. Pour passer au temps, il suffit d'une horloge. Supposons que le pilote émette un photon à chaque battement de sa propre montre, et prenons le battement pour unité de temps : la fusée reste un battement à chaque arrêt, puis émet.

L'accélération ressentie par le pilote est le gain de rapidité par battement, $\ln(a/(a - 2))$. Elle croît sans cesse.

L'accélération vue du départ se mesure avec l'horloge de l'observateur resté au point de départ. Pour lui, un battement du pilote à l'arrêt a dure $\gamma = E/m = (d^2 + a^2)/(2ad)$; l'accélération est le gain de vitesse divisé par cette durée. Elle monte, puis retombe vers 0.

Pour $d = 11$:

passage	ressentie	durée vue du départ	gain de v	vue du départ	temps au départ
11 $\rightarrow$ 9	0,201	1	0,198	0,198	1,00
9 $\rightarrow$ 7	0,251	1,020	0,226	0,221	2,02
7 $\rightarrow$ 5	0,336	1,104	0,234	0,212	3,12
5 $\rightarrow$ 3	0,511	1,327	0,204	0,154	4,45
3 $\rightarrow$ 1	1,099	1,970	0,122	0,062	6,42

Le pilote atteint le dernier arrêt massif au bout de 5 battements ; l'observateur resté au départ a compté 6,42 battements de sa propre horloge. Le pilote est de plus en plus plaqué contre son siège, et vue du départ, la fusée gagne de moins en moins de vitesse.

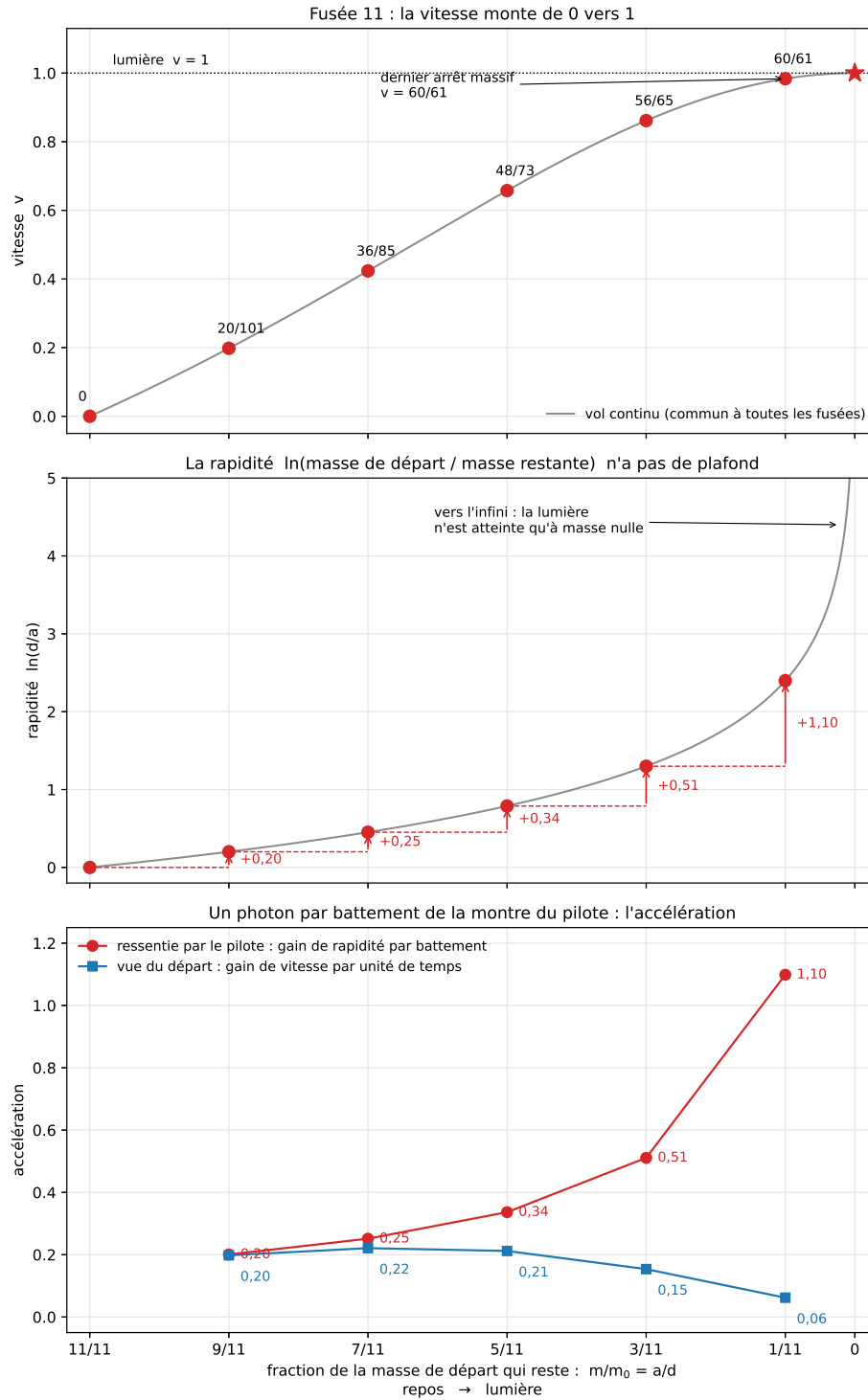


FIGURE 1. La fusée 11. En haut, la vitesse en fonction de la fraction de masse restante ; la courbe grise est le vol continu, commun à toutes les fusées, les points rouges sont les arrêts entiers. Au milieu, la rapidité $\ln(m_0/m)$ et ses gains d'un arrêt au suivant. En bas, avec un photon par battement de la montre du pilote, l'accélération ressentie par le pilote (rouge) et l'accélération vue du départ (bleu).

6.5. Les nombres premiers

Toutes les fusées ont le même vol. La vitesse ne dépend que de la fraction de masse restante a/d : deux fusées à photons qui ont perdu la même proportion de leur masse vont à la même vitesse, quelles que soient leurs masses de départ. Deux fusées d diffèrent donc seulement par leur masse de départ d^2 et par leurs arrêts, les fractions a/d avec a impair.

Deux arrêts de même vitesse n'ont jamais la même masse. L'arrêt $a = 9$ de la fusée 15 a la masse 135 et la vitesse $8/17$; l'arrêt $a = 3$ de la fusée 5 a la même vitesse et la masse 15. Le premier triplet, (135, 72, 153), est le second, (15, 8, 17), multiplié par 9 : c'est le même instant du vol, dans une autre unité de masse.

La fusée de naissance d'une vitesse. Simplifions la fraction a/d en a'/d' , avec $g = \gcd(a, d)$, $a' = a/g$, $d' = d/g$; a' et d' restent impairs. La fusée d' , de masse de départ d'^2 , s'arrête à la même vitesse, à son étape a' ; aucune fusée de dénominateur plus petit ne s'y arrête, puisque a'/d' est irréductible. C'est la *fusée de naissance* de cette vitesse. La vitesse revient ensuite, à l'identique, sur les fusées $3d'$, $5d'$, $7d'$, ..., et sur elles seulement.

Sur la droite, $\gcd(a, b) = \gcd(a, d)$ (section 4.2). L'arrêt est donc une naissance ($g = 1$) si et seulement si son triplet est primitif ; sinon, son triplet est celui de la fusée de naissance multiplié par g^2 .

PROPOSITION 6.1. *L'entier impair d est premier si et seulement si tous les arrêts de la fusée d sont des naissances : aucune de ses vitesses n'est atteinte par un arrêt d'une fusée de masse de départ plus petite.*

DÉMONSTRATION. Si d est premier, $\gcd(a, d) = 1$ pour $1 \leq a < d$. Si $d = st$ avec s son plus petit facteur premier, l'arrêt $a = s$ a $g = s$: sa vitesse naît sur la fusée t . $\square$

Le nombre de naissances de la fusée d est le nombre d'entiers impairs $a < d$ premiers avec d , soit $\varphi(d)/2$: parmi les $\varphi(d)$ entiers de 1 à $d - 1$ premiers avec d , a et $d - a$ sont de parités opposées. Il vaut $(d - 1)/2$, le nombre total d'arrêts, exactement quand d est premier.

Pour $d = 15 = 3 \cdot 5$, les arrêts $a = 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1$ ont les fractions $13/15, 11/15, 3/5, 7/15, 1/3, 1/5, 1/15$. Quatre sont des naissances ; trois vitesses sont nées plus tôt :

- $a = 9$: (135, 72, 153) = $9 \cdot (15, 8, 17)$, née sur la fusée 5, $v = 8/17$;
- $a = 5$: (75, 100, 125) = $25 \cdot (3, 4, 5)$, née sur la fusée 3, $v = 4/5$;
- $a = 3$: (45, 108, 117) = $9 \cdot (5, 12, 13)$, née sur la fusée 5, $v = 12/13$.

La fusée 7, dont 7 ne divise pas 15, ne partage aucun arrêt avec elle.

Une fusée à photons passe continûment par toutes les vitesses. La propriété porte sur les arrêts où la masse, l'impulsion et l'énergie sont entières : la primalité dit quels arrêts sont nouveaux.

6.6. Les niveaux interdits

La règle. On n'admet comme états de la fusée que les triplets primitifs ; le départ au repos et la lumière finale, triangles aplatis, restent hors de la règle. Un triplet non primitif est un triplet primitif mesuré dans une unité plus petite ; la relativité n'a pas d'unité privilégiée, la mécanique quantique en a une, la constante de Planck.

Les niveaux. L'énergie dépend de l'observateur, la masse non. Les niveaux de la fusée d sont ses masses

$$m = ad, \quad a = d - 2, d - 4, \dots, 1,$$

et le niveau a est permis si et seulement si $\gcd(a, d) = 1$. Pour d premier, tous les niveaux sont permis : l'échelle est complète, ses barreaux régulièrement espacés de $2d$. Pour d composé, les barreaux manquants sont ceux où a est multiple d'un facteur premier de d ; il reste $\varphi(d)/2$ barreaux. Pour $d = 15$, les niveaux 135, 75 et 45, soit $15 \cdot 9$, $15 \cdot 5$ et $15 \cdot 3$, sont interdits.

Les sauts. Une fusée composée doit franchir les niveaux interdits. Elle le fait par un seul photon, émis vers l'arrière : le passage d'un niveau a au niveau permis suivant a' garde $E + p$, comme tous les passages de la droite. Dans le repère de la fusée, ce photon a l'énergie

$$\varepsilon^* = \frac{M^2 - M'^2}{2M} = \frac{d(a^2 - a'^2)}{2a}, \quad M = ad, \quad M' = a'd.$$

C'est la règle de Bohr, l'énergie du photon fixée par les deux niveaux, dans sa forme relativiste exacte : ε^* est un peu plus petit que l'écart de masse $M - M' = d(a - a')$, la différence partant dans le recul de la fusée.

Pour $d = 15$, les niveaux permis sont 225 (repos), 195, 165, 105, 15. Les photons valent 28, puis 27,69, puis 49,09 pour le saut de 165 à 105, qui franchit 135, puis 51,43 pour le saut de 105 à 15, qui franchit 75 et 45 d'un coup. Pour $d = 11$, premier, la fusée descend barreau par barreau : 20 ; 19,56 ; 18,86 ; 17,6 ; 14,67.

Avec cette règle, la primalité de d départage deux sortes de fusées : celles dont l'échelle est complète, qui descendent d'un barreau à la fois, et celles dont l'échelle a des trous, et dont les sauts forcés révèlent les diviseurs de d .

6.7. Le facteur de Doppler relie les fusées

Changer d'observateur. Un changement d'observateur de facteur de Doppler k multiplie $E + p$ par k , divise $E - p$ par k , et garde la masse. Avec les graines, $E + p = d^2$ et $E - p = a^2$: le point (a, d) devient $(a/\sqrt{k}, d\sqrt{k})$, et le produit $ad = m$ ne change pas. Dans le plan des graines, le point glisse sur l'hyperbole

$$a(a + 2b) = m.$$

Deux arrêts (a, d) et (a', d') décrivent donc la même particule, vue par deux observateurs, si et seulement si

$$ad = a'd',$$

et le facteur de Doppler qui les relie vaut $k = (d'/d)^2$.

La masse 15 est à l'arrêt $a = 3$ de la fusée 5, triplet (15, 8, 17), et à l'arrêt $a = 1$ de la fusée 15, triplet (15, 112, 113) ; le facteur de Doppler vaut $(15/5)^2 = 9$. La masse 45 est sur les fusées 9, 15 et 45, aux arrêts $a = 5, 3, 1$.

Les fusées d'une particule. Une particule de masse m (impaire, puisque a et d le sont) se trouve sur les fusées d qui divisent m et vérifient $d^2 > m$, puisque $a < d$; elle y est à l'arrêt $a = m/d$. Une particule de masse première q n'est que sur la fusée q , à son dernier arrêt massif $a = 1$.

PROPOSITION 6.2. *Deux fusées premières distinctes n'ont aucune particule en commun : aucun changement d'observateur n'envoie un arrêt entier de l'une sur un arrêt entier de l'autre.*

DÉMONSTRATION. Soient $p \neq q$ premiers et $ap = a'q$ avec $a < p$ et $a' < q$. Comme q divise ap sans diviser p , il divise a , donc $q \leq a < p$. De même p divise a' , donc $p \leq a' < q$. Les deux inégalités se contredisent. $\square$

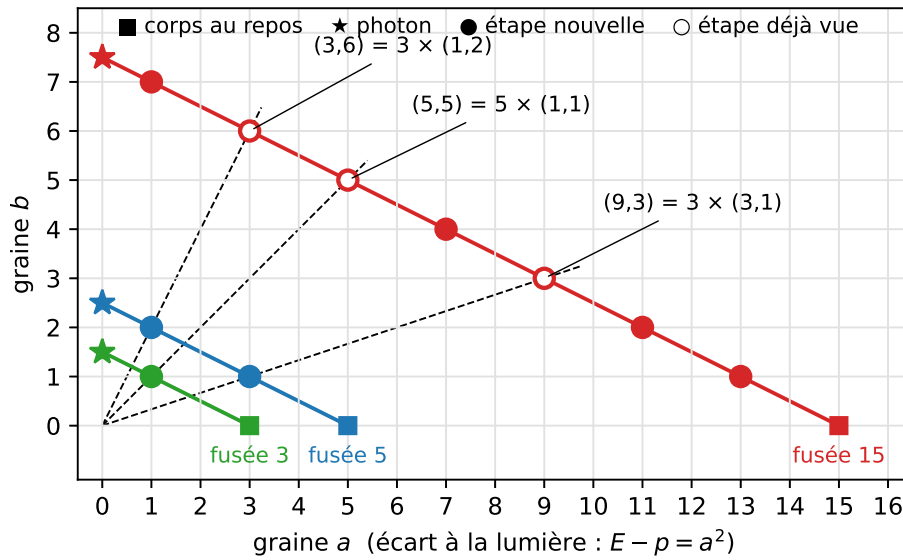
Plus précisément, la particule de l'arrêt a d'une fusée première p n'est, en dehors de p , que sur des fusées multiples de p : un diviseur d' de ap non multiple de p divise a , donc $d' \leq a$, et $d'^2 \leq a^2 < ap$.

Deux relations entre fusées.

	même vitesse (section 6.5)	même masse (cette section)
dans le plan des graines	demi-droite issue de l'origine	hyperbole $a(a + 2b) = m$
opération	changement d'unité	changement d'observateur
de la fusée d vers	ses multiples	les fusées d' avec $d'a' = da$

Aucune des deux ne relie deux fusées premières distinctes.

Le plan des graines : même vitesse = même demi-droite issue de l'origine



Le vol : même fraction de masse restante = même vitesse ; seuls les arrêts changent

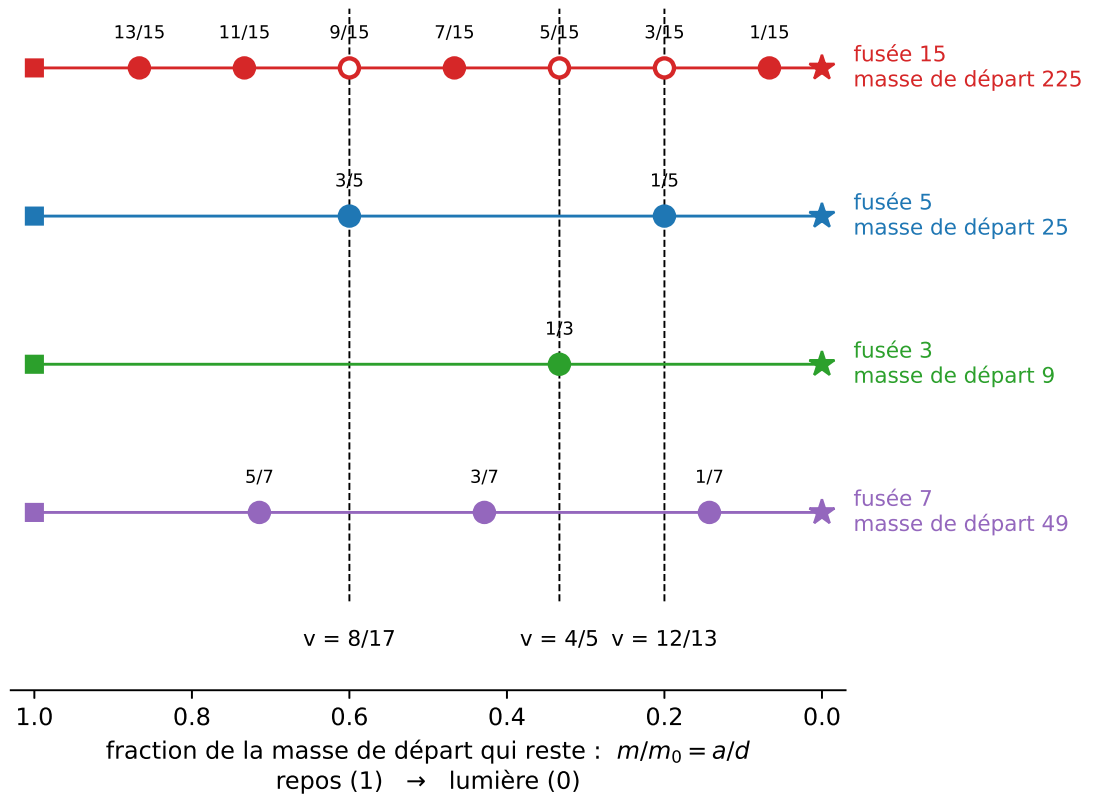


FIGURE 2. En haut, le plan des graines : deux arrêts ont la même vitesse quand ils sont sur une même demi-droite issue de l'origine. Points pleins : naissances ; points vides : vitesses déjà atteintes. En bas, les arrêts des fusées 15, 5, 3 et 7 selon la fraction de masse restante.

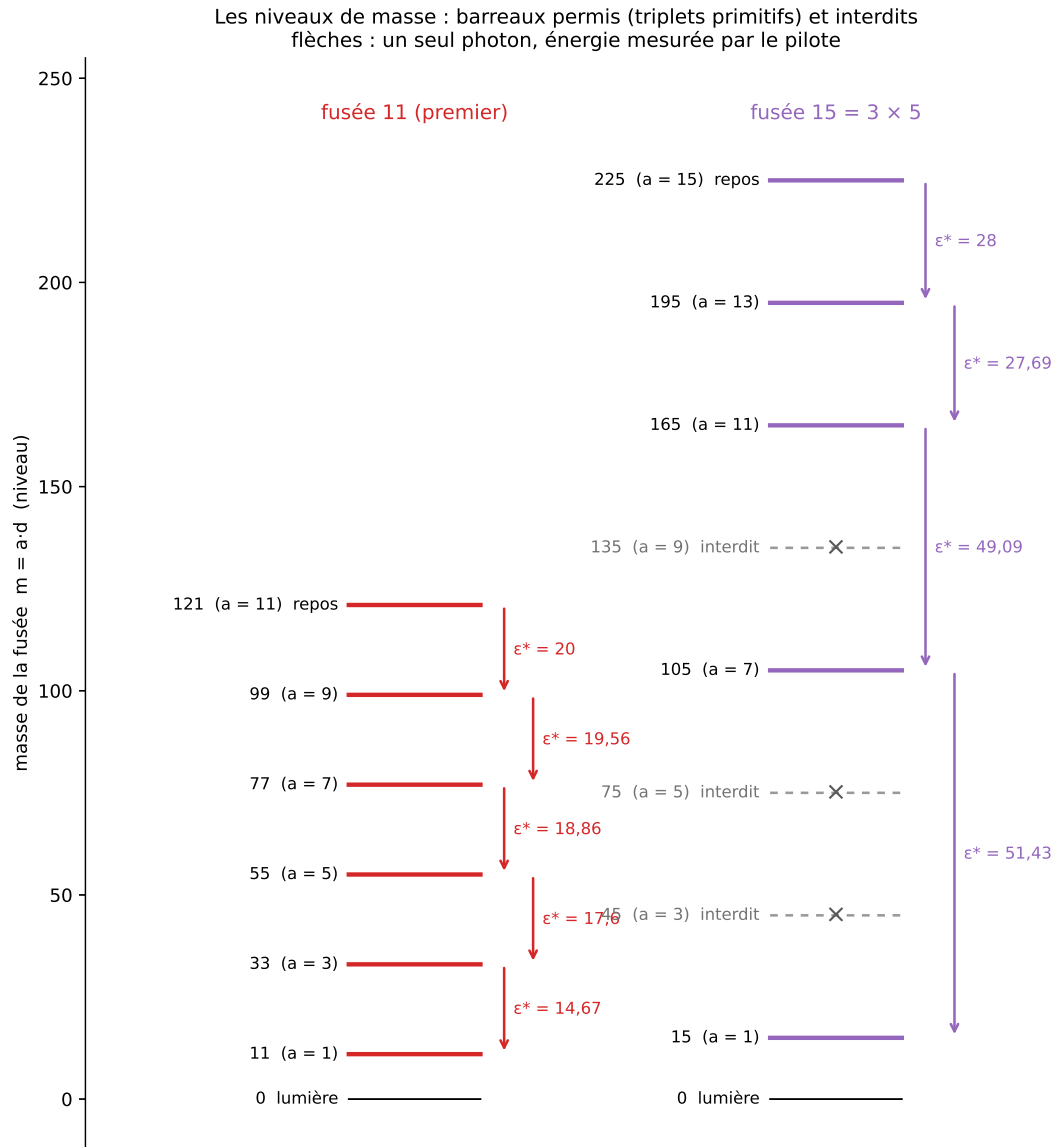


FIGURE 3. Les échelles de masse des fusées 11 et 15. Traits pleins : niveaux permis (triplets primitifs); pointillés barrés : niveaux interdits. Chaque flèche est un photon unique, d'énergie ε^* mesurée par le pilote.

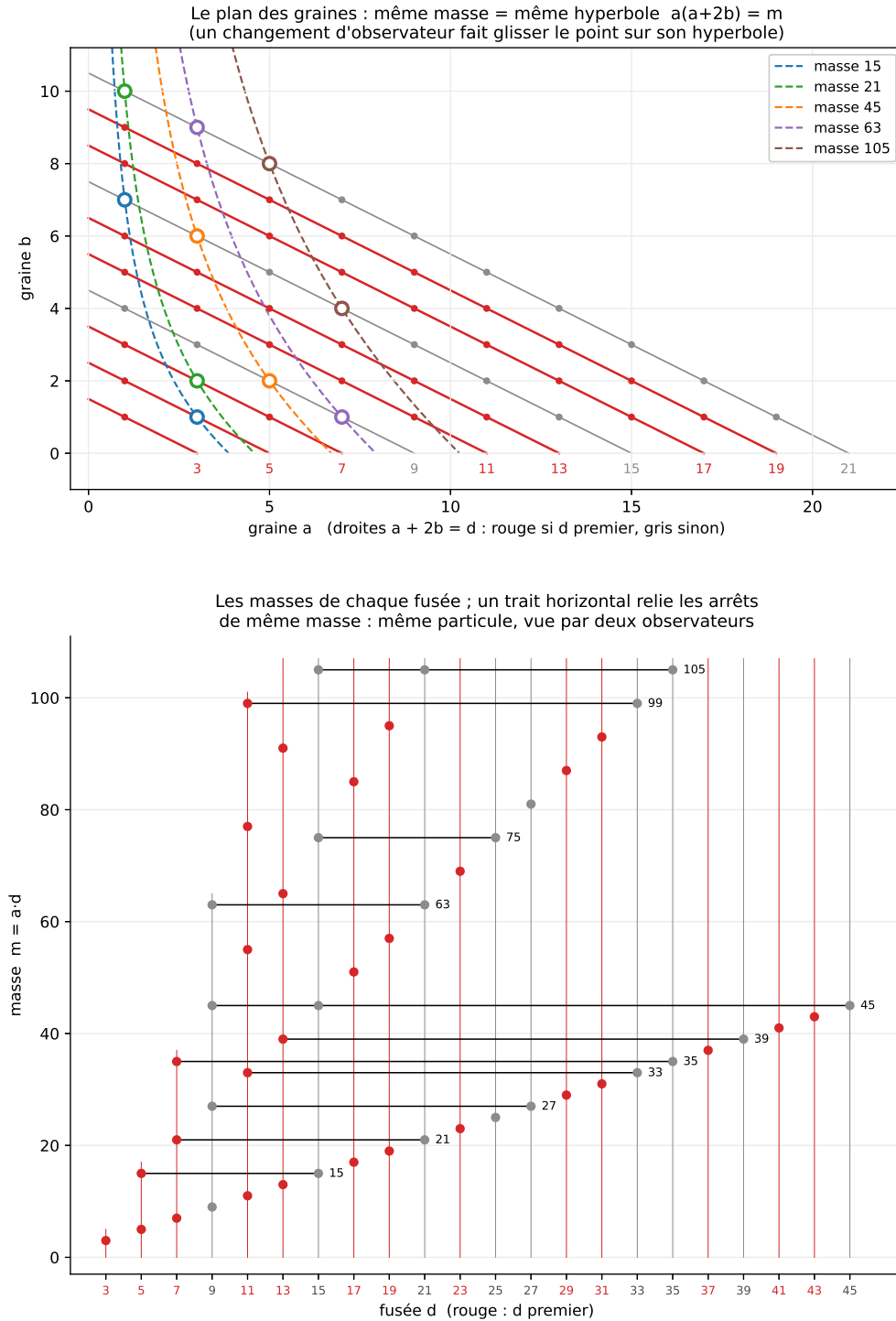


FIGURE 4. En haut, le plan des graines : les droites $a + 2b = d$ pour $d \leq 21$ (rouges si d est premier) et cinq hyperboles de masse constante ; les cercles marquent la même particule sur plusieurs fusées. En bas, les masses $a d \leq 105$ des fusées $d \leq 45$; un trait horizontal relie les arrêts de même masse. Aucun trait ne relie deux colonnes rouges.

6.8. Récapitulatif

méthode des graines	formule	physique
cathète x	ad	masse m
cathète y	$2bc$	impulsion p
hypoténuse z	$b^2 + c^2$	énergie E
théorème de Pythagore	$x^2 + y^2 = z^2$	relation d'Einstein $E^2 = m^2 + p^2$
rapport y/z	$\sin \theta = \frac{d^2 - a^2}{d^2 + a^2}$	vitesse v
rapport d/a	$\sqrt{(1+v)/(1-v)}$	facteur de Doppler
défaut $z - y$	a^2	écart à la lumière $E - p$
défaut $z - x$	$2b^2$	énergie cinétique $E - m$
graine $a = 0$	$(0, 2, 2)$	un photon
graine $b = 0$	$(1, 0, 1)$	un corps immobile
famille b fixé	$z = x + 2b^2$	énergie cinétique constante
famille a fixé	$z = y + a^2$	écart à la lumière constant
famille presque isocèle	$ x - y = 1$	les plus proches de $\sqrt{2}/2$
droite $a + 2b = d$	$z + y = d^2$	$E + p$ constant, du repos au photon

Conclusion

À écrire.

Ce qui existait déjà. A priori, tous ces résultats existent déjà, certains très anciens, d'autres très récents. Notamment :

- la formule elle-même est celle d'Euclide [1], et sa forme sur deux entiers prolongés par la règle de Fibonacci est celle de Horadam [2] ;
- les familles $a = 1$ et $b = 1$ sont celles de Pythagore et de Platon, rapportées par Proclus [3] ;
- les graines de la famille presque isocèle, $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(7, 5)$, $(17, 12)$, $\dots$, sont les nombres diagonaux et latéraux de Théon de Smyrne [4] ;
- le paramétrage par les défauts d'hypoténuse est la méthode de Dickson [5] ;
- la suite a, b, c, d , avec le rayon inscrit ab , les rayons exinscrits ac, bd, cd , l'aire $abcd$ et les tangentes des demi-angles a/d et b/c , est la « boîte de Fibonacci » de Bernhart et Price [6] ;
- une famille de triplets par racine carrée, gouvernée par une équation de Pell, est chez Beatrix [7] ;
- la démonstration de Pythagore par les demi-angles repose sur le même mécanisme que celle de Kise, Uehara et Shinzato [8] ;
- les droites $a + 2b = p$ du chapitre 4 sont l'image, par le changement de coordonnées $(m, n) = (a + b, b)$, des anti-diagonales $m + n = p$ du verger d'Euclide, le dessin des couples (m, n) premiers entre eux : la propriété arithmétique est la même, seul le plan change, et avec lui ce que portent les points, ici des triangles rectangles.

Ce que l'IA Claude n'a pas trouvé dans la littérature, la recherche, faite sur le web en septembre 2026, n'étant pas exhaustive. Quatre points n'y ont pas été trouvés :

- la lecture des trois familles comme celles des trois défauts minimaux, 1, 2 et 1, une par paire de côtés, avec $(3, 4, 5)$ pour seul triplet commun à deux d'entre elles ;
- le mot des écarts de la section 2.5, qui range les carrés impairs et les doubles de carrés et forme le mot sturmien de pente $\sqrt{2} - 1$, point fixe de $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{abb}$, $\mathbf{b} \mapsto \mathbf{ab}$;
- la lecture relativiste des défauts (chapitre 5) : en prenant la vitesse de la lumière égale à 1, la relation d'Einstein $E^2 = m^2 + p^2$ est le théorème de Pythagore, et pour $(x, y, z) = (m, p, E)$ le défaut $z - y = a^2$ est l'écart à la lumière $E - p$, le défaut $z - x = 2b^2$ l'énergie cinétique $E - m$;
- la représentation des nombres premiers du chapitre 4 : dans le plan des graines, les droites $a + 2b = p$ qui ne portent que des triplets primitifs sont exactement celles où p est premier ; aucun dessin de ces droites, ni des anti-diagonales correspondantes du verger d'Euclide, n'a été trouvé.

Abaque

Table des triplets pour $a, b \in \{1, \dots, 10\}$

Triplets (x, y, z) donnés par (1), ordonnés par a puis par b . Le premier bloc est la famille $a = 1$. Les lignes en gras sont la famille $b = 1$, une étoile ($\star$) marque les triplets presque isocèles et un astérisque ($*$) les triplets non primitifs.

Les deux premières familles suivent le quadrillage : un bloc, une ligne par bloc. La troisième ne le suit pas — $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(7, 5)$, puis $(17, 12)$ qui sort du tableau — la droite $a = b\sqrt{2}$ qu'elle longe ne portant aucun point entier.

a	b	x	y	z	
1	1	3	4	5	$\star$
1	2	5	12	13	
1	3	7	24	25	
1	4	9	40	41	
1	5	11	60	61	
1	6	13	84	85	
1	7	15	112	113	
1	8	17	144	145	
1	9	19	180	181	
1	10	21	220	221	
2	1	8	6	10	$*$
2	2	12	16	20	$*$
2	3	16	30	34	$*$
2	4	20	48	52	$*$
2	5	24	70	74	$*$
2	6	28	96	100	$*$
2	7	32	126	130	$*$
2	8	36	160	164	$*$
2	9	40	198	202	$*$
2	10	44	240	244	$*$
3	1	15	8	17	
3	2	21	20	29	$\star$
3	3	27	36	45	$*$
3	4	33	56	65	
3	5	39	80	89	
3	6	45	108	117	$*$
3	7	51	140	149	
3	8	57	176	185	

suite page suivante

a	b	x	y	z	
3	9	63	216	225	*
3	10	69	260	269	
4	1	24	10	26	*
4	2	32	24	40	*
4	3	40	42	58	*
4	4	48	64	80	*
4	5	56	90	106	*
4	6	64	120	136	*
4	7	72	154	170	*
4	8	80	192	208	*
4	9	88	234	250	*
4	10	96	280	296	*
5	1	35	12	37	
5	2	45	28	53	
5	3	55	48	73	
5	4	65	72	97	
5	5	75	100	125	*
5	6	85	132	157	
5	7	95	168	193	
5	8	105	208	233	
5	9	115	252	277	
5	10	125	300	325	*
6	1	48	14	50	*
6	2	60	32	68	*
6	3	72	54	90	*
6	4	84	80	116	*
6	5	96	110	146	*
6	6	108	144	180	*
6	7	120	182	218	*
6	8	132	224	260	*
6	9	144	270	306	*
6	10	156	320	356	*
7	1	63	16	65	
7	2	77	36	85	
7	3	91	60	109	
7	4	105	88	137	
7	5	119	120	169	★
7	6	133	156	205	
7	7	147	196	245	*
7	8	161	240	289	
7	9	175	288	337	
7	10	189	340	389	
8	1	80	18	82	*
8	2	96	40	104	*

suite page suivante

a	b	x	y	z	
8	3	112	66	130	*
8	4	128	96	160	*
8	5	144	130	194	*
8	6	160	168	232	*
8	7	176	210	274	*
8	8	192	256	320	*
8	9	208	306	370	*
8	10	224	360	424	*
9	1	99	20	101	
9	2	117	44	125	
9	3	135	72	153	*
9	4	153	104	185	
9	5	171	140	221	
9	6	189	180	261	*
9	7	207	224	305	
9	8	225	272	353	
9	9	243	324	405	*
9	10	261	380	461	
10	1	120	22	122	*
10	2	140	48	148	*
10	3	160	78	178	*
10	4	180	112	212	*
10	5	200	150	250	*
10	6	220	192	292	*
10	7	240	238	338	*
10	8	260	288	388	*
10	9	280	342	442	*
10	10	300	400	500	*

Bibliographie

- [1] Euclide, *Éléments*, Livre X, vers 300 av. J.-C.
- [2] A. F. Horadam, *Fibonacci number triples*, American Mathematical Monthly **68** (1961), 751–753.
- [3] Proclus, *Commentaire sur le premier livre des Éléments d’Euclide*, sur la proposition I.47 ; voir T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid’s Elements*, vol. 1, Cambridge University Press, 1908.
- [4] Théon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, trad. J. Dupuis, Hachette, Paris, 1892.
- [5] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol. II, *Diophantine Analysis*, Carnegie Institution of Washington, 1920.
- [6] F. R. Bernhart et H. L. Price, *Heron’s formula, Descartes circles, and Pythagorean triangles*, arXiv:math/0701624 (2007).
- [7] F. Beatrix, *Unlocking a new realm of Pythagorean triples*, Parabola **59** (2023), n° 2, University of New South Wales.
- [8] S. Kise, T. Uehara et T. Shinzato, *Trigonometric Ratios Can Prove the Pythagorean Theorem*, arXiv:2506.06304 (2025).
- [9] Platon, *Ménon*, 82b–85b.
- [10] Bhāskara II, *Līlāvati*, 1150.